Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 41, No. 4, December 1998

© 1998 The Operations Research Society of Japan

集団意思決定ストレス法の集団 AHP への適用

中西昌武　名古屋経済大学
木下栄蔵　名城大学

(受理 1997 年 8 月 13 日；再受理 1998 年 1 月 12 日)

和文概要　本論文は，集団意思決定を効果的に行うために，新しい手法「集団意思決定ストレス法」を提案し，Analytic Hierarchy Process (AHP) への適用を検討する．

この手法は，評価者の原始データ (見解) を操作することなく，各評価者の不満の総和 (集団意思決定ストレス) を最小化する評価者格付けを行う．参加者の合理的な格付けの結果，類似見解が多い見解の持ち主の重みは大きくなり，孤立した見解の持ち主の重みは小さくなるが，それぞれの重みが不当に重んじられたり軽んじられたりすることはない．この手法を用いることにより，類似見解グループの探索や，それに基づく集団案の収斂が行いやすくなる．

1. はじめに

集団意思決定をいかに満足ゆく形で実施するかは、事業計画を立案・運営するものにとって古くて新しい問題である。その課題は、当然、ＡＨＰ(Analytic Hierarchy Process)にも受け継がれている。ＡＨＰの集団意思決定への適用についてＡＨＰの開発者Saaty[1]は、①集団構成員全員の合議により評価コンセンサスを求める方法と②集団構成員個々の一対比較行列の値を幾何平均することにより集団案を求める方法、を提案している。しかし①についてはコンセンサスを得るまで時間がかかり調整負荷が大きくなる恐れがあり、②については個々人の不満の総和が最小とならない集団案を導く危険性がある。①については、Harker[2]の不完全一対比較行列の適用、木下・中西[3]の簡便的適用手法などによる負荷軽減が、また②については山田・杉山・八巻[4]による区間ＡＨＰ法などが提案されている。集団意思決定においては、発散する多様な見解をどのように収斂させるかが課題のひとつとなっている[5]が、これらはいずれもＡＨＰを集団意思決定に適用する場合の収斂技術として位置付けることができる。

上の手法はいずれも参加者の積極的な格付けを行っていないが、現実には、何らかの格付けによって有効な解決を得ることが多々ある。そこで本稿では、参加者の合理的な格付による収斂技術「集団意思決定ストレス法」を提案し、ＡＨＰへの適用を検討する。

2. 集団意思決定の問題解決シナリオ

いかなる条件・状況においても最適な集団意思決定の手法を求めることはナンセンス[6]である。それぞれの意思決定の場や局面に応じて手法を選択し適用して行くことが現実的である。

合意形成手法の問題は、個人見解と集団見解とのギャップの妥当性をいかに説明するか、という問題でもある。以下、ＡＨＰを集団意思決定に適用する場合の種々の妥当性確保の方法について検討する。

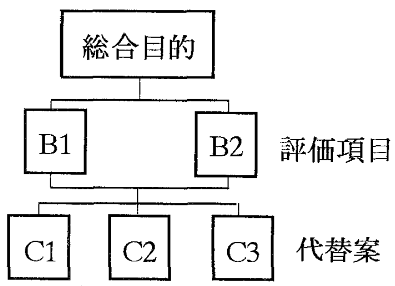

図１　ＡＨＰの階層構造

ＡＨＰは図１に示すような階層構造を用いて評価する[7]。評価は、①総合目的における評価項目のウェイト配分と、②各評価項目に関する代替案のウェイト配分を基に、③それらを積算した総合評価値によって行う。評価者が複数になると、①②のウェイト配分が評価者によって異なってくるので、集団としての評価を行う場合、その合算をいかに妥当なものとするかが重要な問題となる。

ここではそのための問題解決シナリオ[8]を２つの軸の組合せによって整理する(図２)。

①評価者を等価に扱う／格付けする。

②原始データ（見解）を操作しない／操作する。

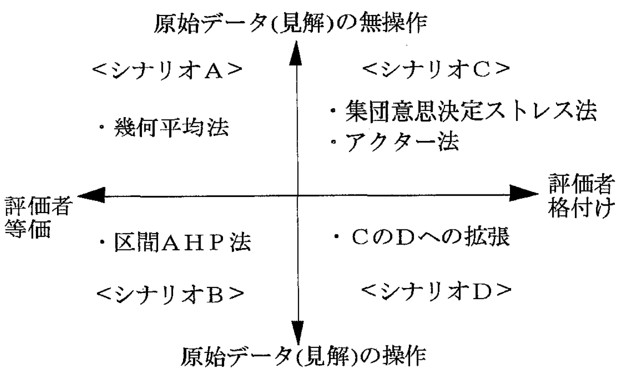

図２　４つのシナリオの特徴と位置関係

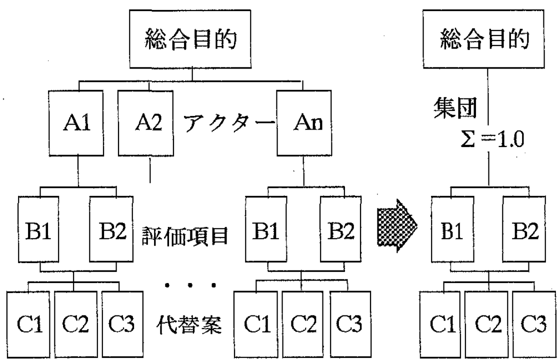

図３　アクター法の階層構造

２．１　評価者を等価に扱うシナリオ

(1) 幾何平均法（見解を操作しない）

Saaty[1]は、ＡＨＰを集団合意形成に適用するための合算技術として、個人ごとの一対比較データの幾何平均値を当該集団の一対比較値とする幾何平均法を提案した。幾何平均法を用いると、集団の一対比較行列の対称成分も逆数関係になり、個人の場合と同じように分析することができる。幾何平均法においては、評価者の見解は操作しない（シナリオＡ）。

(2) 区間ＡＨＰ法（見解を操作する）

山田・杉山・八巻[4]は、Arbel, Saaty, Vargas らによる区間判断のＡＨＰ手法を応用し、区間値により個人見解を保持するグループＡＨＰ法（区間ＡＨＰ法）を提案した。この手法は、はじめに各評価者が一対比較値を区間値として申告し、これをもとに集団見解としての一対比較値を区間値で求め、その中から最も整合性の高い一対比較値を集団全体の見解として集約して行くものである。

区間ＡＨＰ法の場合は、はじめに許容区間を個人に申告させることにより、評価者を擬制的に等価に扱うなかで整合性の見地から評価者の見解に操作を加えている（シナリオＢ）。

２．２　評価者を格付けする方法

(1) アクター法（見解を操作しない）

いっぽう、評価者を積極的に格付けする手法としてはアクター法[9]がよく知られている。これは、評価者をアクター（関与者）階層の要素として定義して格付け値を与え、これによってアクターごとの代替案の総合評価を最終的に合算し、集団の評価結果とする手法である（図３）。格付け値は、個々人の見解とはかかわりなく原始データで与えられる。アクター法では個々人の見解は操作しない（シナリオＣ）。

ただしアクター法においては、いかに評価者を「合理的に格付け(grading)」するかが問題となる。従来この問題に対しては、①トップダウンでアクターを格付けできる者を立てて格付けをゆだねる、②アクター同士の相互格付けを算術平均する[10]、③説明可能度（評価要素が上位目的を説明できる度合い）による重みづけ[11]などの方法がとられてきたが、評価者の利害関係

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

が絡むと運営が難しくなる。

(2) 集団意思決定ストレス法（合理的な格付け）

そこで筆者はシナリオCを合理的に進めるための手法のひとつとして「集団意思決定ストレス法」を提案する。

個人が行う評価においても、錯綜する価値観などの理由により評価は必ずしも整合性が保たれない。このようなときの意思決定はストレスを伴いやすい[12]。集団意思決定の場合はさまざまな価値観の持ち主の参加を前提としており、参加者の不満は不可避的に発生する。

集団意思決定ストレス法は、評価者の当初の評価結果をもとに個々人の不満の総和（集団意思決定ストレス）を最小にする集団案およびその場合の個々人の格付け案を個々人に提示し、集団の中での個々人の位置を評価者自身に自覚させる手法である。集団意思決定ストレス法は、見解に操作を加えないまま合理的な格付けを行う。

3. 集団意思決定ストレス法の具体的方法

集団意思決定ストレス法は、数理計画法を用いて評価者を「合理的に格付け」することによって、集団全体の意思決定ストレスすなわち「集団案によって発生する個人の不満の総和」を最小にするアプローチである。評価者格付け案を個人ごとの妥協案として集団整合性の立場から提案してゆくアプローチである。合計不満を最小化する手法の中には、各代替案に対する個々人の不満を直接集計する方法[13]もあるが、これだと個々人の代替案評価から集団案を求める視点が失われてしまう。ここでは、個々人の代替案評価の情報のみを元に、集団整合性の観点から各評価者の格付け案およびそれにもとづく集団案を導くことにする。

林[16]は、偏差平方和すなわち不満の総和を最小にする代表値の取り方こそ民主主義的である、と述べている。ここでは林にならい、評価者個々の不満の総和を仮説的に表す指標として「偏差平方和」を用いることにする。また格付け値は、集団案に寄与すべき評価者の見解の重みとして用いることにする。

そこで集団意思決定ストレス(S)を以下のように定義する。

i ：評価者($i=1,..n$)

j ：評価要素 ($j=1,...m$)

x_{ij} ：評価者iによる評価要素jの評価結果

w_i ：評価者iの格付け値(合計を1とする)

e_j ：評価要素jに関する集団評価の平均

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{3.1}$$

$$e_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot x_{ij}) \tag{3.2}$$

$$S = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot x_{ij} - e_j)^2 \tag{3.3}$$

x_{ij}は、代替案間の一対比較による評価（相対評価法型ＡＨＰ）、代替案間の一対比較によらない評価（絶対評価法型ＡＨＰ）[17]いずれの評価法によって求めても構わない。ここでは原始データ（見解）x_{ij}の値は変えないものとする。x_{ij} **はそれぞれの評価者の個性を表現し、これ以上分解してはならない情報単位**と考えるためである（評価者の見解の保持）。

したがって調整可能なデータは、評価を総合するために設定された格付け値w_iだけである。集団意思決定ストレスＳが最小になるw_i値が、求める合理的格付け案である。

具体的には(3.1)を制約式とし(3.3)を最小とするw_iの値w_i*をラグランジュ未定乗数法によって解けばよい。ラグランジュ未定乗数をλとする。

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \cdots \\ x_{ij} \\ \cdots \\ x_{im} \end{bmatrix} \qquad W^* = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \cdots \\ w_i^* \\ \cdots \\ w_n^* \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

とおくと、解となる格付け値W＊は以下の式で求めることができる。

$$\begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ \cdots \\ w_n^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n-1)|X_1|^2, & -(X_1,X_2), & \cdots & -(X_1,X_n), & 1 \\ -(X_2,X_1), & (n-1)|X_2|^2, & \cdots & -(X_2,X_n), & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -(X_n,X_1), & -(X_n,X_2), & \cdots & (n-1)|X_n|^2, & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

w_i^*は、$0<w_i^*<1$ となる（証明は後述）ため、W＊は評価者間の格付けの配分、すなわち評価者の「一票の重み」を示す値となる。

集団意思決定ストレス法は、２つの基準 ①「評価者の見解の保持」②「集団案と個人案のギャップの最小化」によって、評価者の差別化に合理的な論拠を与える。ここでは集団のために自らの見解をゆずるべき評価者ひとりひとりの妥協の大きさが、集団意思決定ストレスの最小化の原理によって一意に算出される。

保持対象となる評価者の見解は、区間ＡＨＰ法のような区間での申告を必要としない。区間ＡＨＰ法における申告区間は評価者を擬制的に等価とするために設けられたが、意思決定ストレス法の場合は、評価者の許容のいかんを問わず、ある格付けをもって妥当な集団案を個人に対し提示する。

4. 集団意思決定ストレス法による算定例

ここでは、３．で示した方法による算定例を示す。

4．1 順位決定に影響をおよぼすケース

はじめに、集団意思決定ストレス法が順位決定に影響するケースを示す。

まず評価者を３人とし、各評価者の代替案C1, C2, C3に対する見解を表１のように仮定する。表２は評価者P1～P3の評価結果の算術平均である。

この結果、代替案の評価はA:B:C =0.290:0.355:0.355 となり、BとCが１位を分けあう結果となった。集団意思決定ストレスは0.0325である。

次に、評価者の格付けによる集団意思決定ストレスの改善を検討する（表３）。評価者の格付けは P1:P2:P3 = 0.321:0.315:0.364 となる。その結果、代替案評価は、A:B:C= 0.286:0.363:0.351 となり、集団見解としてはＢが１位となるべきことが示された。集団意思決定ストレスは1.7%改善(0.0325 → 0.0320) されたに過ぎないが、その中でP1, P2をいくぶん軽く、P3をいくぶん重

表１ 各評価者の一対比較行列

評価者 P1

	A	B	C	W(P1)
A	1	2	4	0.571
B	1/2	1	2	0.286
C	1/4	1/2	1	0.143

C.I＝0.000

評価者 P2

	A	B	C	W(P2)
A	1	1/2	1/4	0.137
B	2	1	1/3	0.239
C	4	3	1	0.624

C.I＝0.009

評価者 P3

	A	B	C	W(P3)
A	1	1/3	1/2	0.163
B	3	1	2	0.540
C	2	1/2	1	0.297

C.I＝0.005

表２ P1～P3の評価の算術平均

代替案→	A	B	C
P1	0.571	0.286	0.143
P2	0.137	0.239	0.624
P3	0.163	0.540	0.297
W	0.290	0.355	0.355

意思決定ストレス＝0.0325

表３ P1～P3の格付けの結果

	格付↓	代替案→	A	B	C
-1.2%	32.1%	P1	0.571	0.286	0.143
-1.8%	31.5%	P2	0.137	0.239	0.624
+3.0%	36.4%	P3	0.163	0.540	0.297
	100.0%	W*	0.286	0.363	0.351

意思決定ストレス＝0.0320（1.7% 改善）

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

く扱う格付けがなされ、そのことが順位付けに貢献している。

この事例では3者の見解が対立しているが、集団意思決定ストレス法の実施結果はP1, P2 の妥協による解決の道を示唆している。P1, P2 の反応の仕方にもよるが、集団意思決定のためのコーディネーション情報として活用すべきだろう。

なお、この事例に幾何平均法を適用すると代替案評価は A:B:C = 0.168:0.483:0.349となるが、このときの集団意思決定ストレス0.387は元の値0.0325を大きく上回るものであり、むしろ個々人の不満を増大させる結果となっている。

4. 2　多数派有利となる傾向

次に、多数派と少数派では多数派がやや有利に扱われることを示す。

表4では、6人のうち5人（P1～P5）の評価者がほぼ同じ見解を持ち、1人（P6）　がこれと対立する見解を持っている。算術平均による6人の見解の合算は A:B:C = 0.633:0.258:0.108、また集団意思決定ストレスは0.0172となった。

表4　P1～P6の評価の算術平均

代替案→	A	B	C
P1	0.700	0.200	0.100
P2	0.800	0.100	0.100
P3	0.800	0.150	0.050
P4	0.750	0.200	0.050
P5	0.650	0.200	0.150
P6	0.100	0.700	0.200
W	0.633	0.258	0.108

意思決定ストレス=0.0172

表5　P1～P6の格付けの結果

	格付↓	代替案→	A	B	C
+2.2%	18.9%	P1	0.700	0.200	0.100
-0.1%	16.6%	P2	0.800	0.100	0.100
-0.1%	16.6%	P3	0.800	0.150	0.050
+1.0%	17.6%	P4	0.750	0.200	0.050
+3.4%	20.0%	P5	0.650	0.200	0.150
-6.4%	10.3%	P6	0.100	0.700	0.200
	100.0%	W*	0.670	0.227	0.103

意思決定ストレス=0.0145（15.6%改善）

表5は、表4に対し集団意思決定ストレス法による各評価者の格付けを行った結果、集団意思決定ストレスが15.6%改善（0.0172→0.0145）されたことを示している。その結果、P1～P5の見解が尊重され、P6は格付け値で−6.4%の妥協を迫られる。多数勢力のうちP1, P4, P5の見解がより尊重される結果となっているのは、これらがより集団案W*に近いためである。

ところで表4・5のP6は全くないがしろにされたわけではない。P6には、なお10.3%の発言権が留保されている。P6の見解をそれ以上ないがしろにすると、P6の不満が大きくなりすぎ、結果として集団の不満の総和が大きくなるので、これが均衡解となる。

このように集団意思決定ストレス法で得られる集団案は、拮抗しあう個人間のストレスを均衡させる解であるといえる。

表6　P1～P12の格付けの結果

見解	代替案スコア		0.065	0.238	0.279	0.417
スコア	格付↓	代替案→	W	X	Y	Z
0.179	8.5%	P1	0.320	0.340	0.310	0.030
0.227	7.5%	P2	0.370	0.450	0.080	0.100
0.291	7.1%	P3	0.270	0.530	0.130	0.070
0.410	7.9%	P4	0.410	0.050	0.360	0.180
0.452	8.9%	P5	0.220	0.350	0.340	0.090
0.502	9.3%	P6	0.350	0.130	0.300	0.220
0.539	9.7%	P7	0.230	0.300	0.320	0.150
0.543	8.9%	P8	0.260	0.400	0.120	0.220
0.578	7.2%	P9	0.350	0.240	0.000	0.410
0.602	9.3%	P10	0.330	0.130	0.240	0.300
0.819	8.1%	P11	0.120	0.210	0.460	0.210
0.856	7.5%	P12	0.240	0.040	0.290	0.430
		算術平均解	0.289	0.264	0.246	0.201
		ストレス最小解	0.288	0.262	0.251	0.199

・意思決定ストレス0.684(←0.720)
・第1固有値の寄与率0.504
・クラスター化による相関係数=0.491(← 0.076)

4. 3　格付け値の分布傾向

集団意思決定ストレス法による評価者の格付けは、同じタイプの見解が多いほど重みが大きくなり、孤立した見解ほど小さくなる。

表6は、評価者数12、代替案数4の集団意思決定場面における、ある評価者格付けの分布状況を示している。

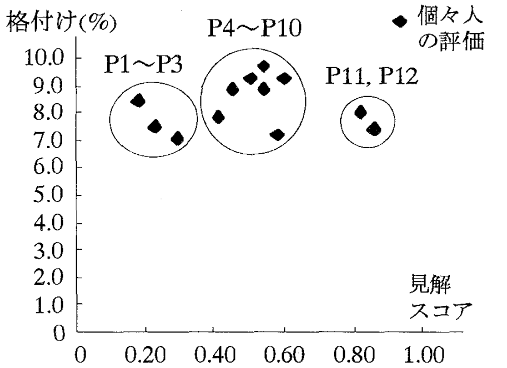

図4 見解スコアに関する格付け値の分布

ここでは数量化III類のパターン解析機能[14,15]を応用し個々人の評価と代替案の相関が最も高くなるように見解スコア（個人見解のサンプル・スコア）及び代替案スコア（代替案のカテゴリ・スコア）を求めた。また評価値=0.000（無反応ケース）

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

すなわち「まったく評価に値しないとの理由で、評価者が一対比較の対象から除外した代替案」を認めるものとする[18]。通常の数量化III類では原始データがバイナリのため個々人における反応カテゴリの重みを等価とせざるをえないが、ここでは合計値を１とする評価値が与えられているので、これを原始データとして計算して見解スコアを求めた。

これにより、スコアが近い見解は何らかの意味で互いに類似している可能性があると見ることができる。

図４は、表６の見解スコアに対する格付け値の分布を示している。

見解スコアと格付け値との間に相関は見られない（相関係数　0.076）。しかし図からは、P1〜P3、P4〜P10、P11〜P12の３グループそれぞれで格付け分布の山が作られているように見える。そこで見解スコアを群間平均距離法[15]でクラスター化し、見解クラスターのレベル値と格付け値の相関を調べてみると、相関係数は0.491となった。

ただし、このように複数のグループが形成される場合は、集団意思決定ストレス法による格付けを用いても合理的な合意形成案の提示は困難である。しかし上のような見解分布をビジュアルに個々人にフィードバックすれば、合意形成への何らかのてがかりを提供することになるであろう。

次に見解クラスターと格付け値との一般的関係を見るために、同じく評価者数１２、代替案数４の集団意思決定場面における300組のランダム評価データについて両者の相関係数の分布を調べた。結果は図５の通りである。相関係数の平均値は0.477となった。評価者の格付け値の大きさが、評価値同士の類似性とある程度相関していることがこれでわかる。

つまり、格付け値の大きな見解があるときは、他にも似たような見解がいくつかあり、それらとともに類似見解グループが形成されている可能性を考えなければならない。数量化III類の応用による見解スコアの分析は、そのための類似見解の探査に有効な手がかりを提供する。そして見解スコアが近い集団の中で格付け値がもっとも高い見解（図４の場合、P1, P7, P11）は、類似見解グループの中核的見解として機能している可能性をみるべきである。

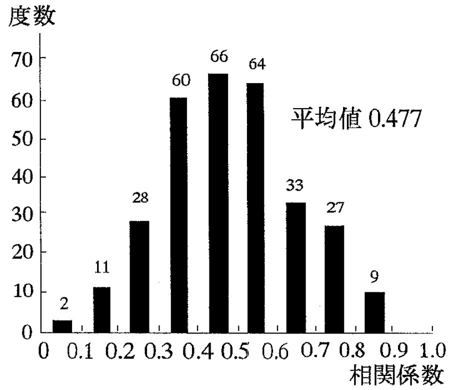

図５ 見解クラスターと格付け値の相関係数の分布

むろん実際にそのとおりとなるかどうかはデータの意味を読みとって判断して行くほかない。しかし集団意思決定の場合は、参加する個人が集団内での自らの位置を適切に自覚していることが合意形成を有効に行う上で重要[5]であり、そのためにはまず最初に、集団内での見解分布を客観的にとらえ鳥瞰図化（山の数や位置、高さ、離れ小島など）する必要がある。見解分布の鳥瞰図が得られたら、改めてその中での自らの位置を再確認し、集団意思決定における自身の振るまいかたを再考すればよい。

図６は、上のランダム評価データに対し集団意思決定ストレス法を適用した場合の集団意思決定ストレスの改善率の分布を示したものである。

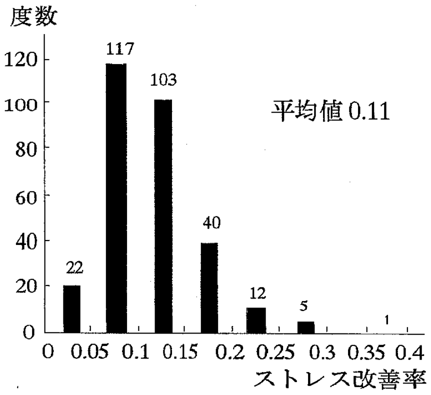

図６ 集団意思決定ストレス法によるストレス改善率の分布

集団意思決定ストレスはほとんど全ての組の評価データで改善が発生している（平均改善率 0.11）。小さな改善率でも代替案の順位決定に影響する場合があることを考えると、集団案の検討プロセスに集団意思決定ストレス法の視点を加える意義は大きいといえる。

なお見解のばらつきが大きくなると、格付け値の差が小さくなる。また見解クラスター化の効果が薄れ、相関係数も低くなる。

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

5. 集団意思決定ストレス法の適用方法と今後の課題

集団意思決定ストレス法は、評価者の不満の総和（集団意思決定ストレス）を最小化する評価者格付け値を求める手法である。

オリジナルの幾何平均法は、集団案が一対比較行列で表わされる点で魅力的だが、評価者の不満の総和を増大させる可能性がある点で難がある。区間ＡＨＰ法は、許容区間を用いた集団案の整合化によって、幾何平均法におけるこうした問題をいちおう解決したといえる。これに対し集団意思決定ストレス法は、集団案を一対比較行列として得る必要は必ずしもないと考え、①評価者の見解の保持と②評価者の不満の総和の最小化、を優先した。この結果、集団意思決定ストレス法は、代替案間の一対比較を行なう相対評価法型のＡＨＰだけでなく、代替案間の一対比較を行わない絶対評価法型のＡＨＰによる評価データも原始データとして扱うことができる。

集団意思決定ストレス法は評価者の原始データ（見解）を操作しないため、区間ＡＨＰ法のように評価者に許容区間を申告させる必要がない。また評価者に許容区間を申告させる場合は、評価者の態度や性格などの申告への影響を公平性の観点から別途考察する必要があるが、数理計画法によって求めた格付け値と集団案を評価者にフィードバックするまでを任務とする集団意思決定ストレス法においてはそうした対策は必要ない。

区間ＡＨＰ法における区間内調整を評価者の格付けと見る考え方もあるが、区間ＡＨＰ法は①集団案を作成するときに各評価者のデータを重み付けず、また②区間内調整の度合いを評価者の格付け値に換算する方法を明示していない。区間ＡＨＰ法は、むしろ、擬制的に評価者を等価に扱う手法として認識すべきであろう。

集団意思決定ストレス法で求めた格付け値w_i*、および集団案については、そのままの形で採択される必要はない。評価者の数が多くなると評価者は集団内での自分の位置がわかりにくくなる。そのような評価者に対し集団意思決定ストレス法はいわば見解の地図を与えることができる。地図を手にした評価者は全体の中での自分の現在の位置を再確認し、合意形成に向けて自分の見解を再調整することができるようになる。また数量化III類などのパターン解析機能と組み合わせることで類似見解を持つグループを探索することも可能である。集団意思決定ストレス法は、これらの情報をフィードバックする。このように集団意思決定ストレス法もまたオリジナルのＡＨＰ[7]と同様、合意形成に向けての情報のフィードバック・アプローチを重視する。合意形成に向けて全体のコーディネーションを行う場合はこうした情報が有用となる。

集団意思決定ストレス法においては、類似見解が多い見解の持ち主の重みは大きくなり、孤立した見解の持ち主の重みは小さくなる。しかしそれぞれの重みが不当に重んじられたり軽んじられたりすることはない。格付け値は常に正となるため、格付け案は各評価者に認められる主張の強さの配分案となる。これは「不満の総和を最小化するためには、どのような見解であっても必ずそれなりに尊重されなければならない」ことを意味する。

集団合意形成のための手法はいろいろあり、手法ごとに導かれる答えは異なりうる。評価者の不満の総和を最小化するために評価者の格付けを行うことが許される場面なら、集団意思決定ストレス法は有効に機能する。そうした場面設定が行えないときは、別の手法をとるべきであろう。また評価者に対しては、それらのことも含めた情報の提供が必要であろう。

本論文では、集団意思決定ストレス法による評価者の合理的格付けの特質と、集団ＡＨＰへの適用可能性を検討した。今後は、集団意思決定ストレス法を、実際の調査事例に適用し、手法としての体系化と適用留意点の整理を行いたい。

最後に、集団意思決定ストレス法のシナリオＤへの拡張的応用について触れる。集団意思決定ストレス法は、個々人の見解の区間値による申告を必ずしも前提としないが、もし区間値がはじめから原始データとして与えられた場合は、それぞれの区間値をさらに制約式に加えたかたちで最小集団意思決定ストレス解を求める数理計画法が必要となる。この場合は、個々人の原始データ（見解）に操作を加えつつ個々人の格付けを行うアプローチ（シナリオＤ）となる。

ただしどのようなテーマに対してそのような拡張的応用が有効となるかについては、適用事例

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

の整理が必要である。

6. 備考【格付け値 $0<w_i^*<1$ の証明】

(Step 1) W_i^* が非負となることの証明

代替案 j に対する評価者 i の評価値を x_{ij} とする。x_{ij} は以下のような値をとる。

$$\begin{cases} 0 \le x_{ij} \le 1 \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \end{cases}$$

いま評価者に対する格付け値 w_i の一部の値が負となる格付け案Aを考える。$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ により、w_i は一つ以上の正なる値を持つ。格付け値を、

$$\begin{cases} w_i < 0 \quad (1 < i \le k) \\ w_i \ge 0 \quad (k < i \le n) \end{cases}$$

のように表すと、案Aによって格付けされた評価値 x_{ij} の集団意思決定ストレス S_A は、以下のようになる。

$$S_A = \sum_{j=1}^{m} n\sigma_i^{\,2} = n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\}$$

ここで、案Aの代案として、 $\alpha = 1\Big/\left(1 - \sum_{i=1}^{k} w'_i\right)$ なる α によって、以下のように定義された非負の格付け値 w'_i を持つ案Bを考える。

$$\begin{cases} w'_i = 0 \quad (1 \le i \le k) \\ w'_i = \alpha w_i \ (k < i \le n) \end{cases}$$

ただし、$\sum_{i=1}^{n} w'_i = 1$ また $\sum_{i=1}^{k} w'_i < 0$ により $0 < \alpha < 1$ である。

案Bによって格付けされた評価値 x_{ij} の集団意思決定ストレス S_B は以下のようになる。

$$\begin{aligned} S_B &= \sum_{j=1}^{m} n\sigma_i'^{\,2} = n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} w'_i x_{ij}\right)^2\right\} = n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} w'_i x_{ij}\right)^2\right\} \\ &= \alpha^2 n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

次に、S_A と S_B の大きさを比較する。案Aが集団意思決定ストレスを最小化する解ならば $S_A > S_B$ とならないはずである。

$$\begin{aligned} S_A - S_B &= \sum_{j=1}^{m} n\sigma_i^2 - \sum_{j=1}^{m} n\sigma_i'^2 \\ &= n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\} - \alpha^2 n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\} \\ &= n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(w_i x_{ij}\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_{ij} + \sum_{i=k+1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\} - \alpha^2 n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\} \\ &= n\sum_{j=1}^{m}\left[\begin{array}{ll} \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_{ij}\right)^2\right\} & \ldots\ldots(D_1) \\ +\left(1-\alpha^2\right)\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w_i x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} w_i x_{ij}\right)^2\right\} & \ldots\ldots(D_2) \\ -\frac{2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_{ij}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} w_i x_{ij}\right) & \ldots\ldots(D_3) \end{array}\right] \end{aligned}$$

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

上のD_1、D_2、D_3の符号を調べる。D_1を以下のように分解する。

$$D_1=\frac{k}{n}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(w_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k}w_i x_{ij}\right)^2\right\}+\frac{n-k}{n^2\cdot k}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k}w_i x_{ij}\right)^2=D_{11}+D_{12}$$

D_{11}は分散の合計のため非負となる。ここではD_{12}を調べる。 i を固定したとき、

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1$$

となる条件より、いかなる i についても値が正となるx_{ij}が 1 つ以上存在する。また$w_i(i\le k)$ はすべて同じ符号（負）である。よって j を固定したとき、

$$\left(\sum_{i=1}^{k}w_i x_{ij}\right)^2>0$$

となる j が 1 つ以上存在する。従って、$D_{12}>0$ すなわち $D_1>0$　同様にして $D_2>0$ である。

また前提より、$i\le k$ のとき $w_i<0$ となるため $D_3\ge 0$ である。

以上の結果、 $D_1+D_2+D_3>0$　により　$S_A>S_B$　となる。

これは「解は最小の意思決定ストレス値を持つ」という前提に反する。

よって案Aは、解ではない。すなわち解の格付け値はすべて非負となる。

(Step 2) w_i * が正となることの証明

次に、Step1 のB案（非負の格付け値w'_i）

$$\begin{cases}w'_i=0 & (1\le i\le k)\\ w'_i>0 & (k<i\le n)\end{cases}$$

の代案として、微小な正の値w_0を用いて定義された以下のような格付け値w''_i

$$\begin{cases}w''_i=w_0 & (1\le i\le k)\\ w''_i=\beta w'_i & (k<i\le n)\end{cases}$$

を持つ案Cを考える。ただし、

$$\sum_{i=1}^{n}w''_i=1 \quad \text{また} \quad \beta=1-k\cdot w_0 \ \text{により}\ 0<\beta<1 \quad \text{である。}$$

案Cの格付け値はすべて正である。案Cによって格付けされた評価値x_{ij}の意思決定ストレスS_Cは以下の通りとなる。

$$S_C=\sum_{j=1}^{m}n\sigma''^2_i=n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w''_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}w''_i x_{ij}\right)^2\right\}$$

$$=n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}w_0^2\sum_{i=1}^{k}x_{ij}^2+\frac{1}{n}\beta^2\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}w_0 x_{ij}+\beta\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\}$$

ここで、S_BとS_Cの大きさを比較する。案Bが集団意思決定ストレスを最小化する解ならば$S_B>S_C$とならないはずである。

$$S_B-S_C=\sum_{j=1}^{m}n\sigma'^2_i-\sum_{j=1}^{m}n\sigma''^2_i$$

$$=n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\}-n\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}w_0^2\sum_{i=1}^{k}x_{ij}^2+\frac{1}{n}\beta^2\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}w_0 x_{ij}+\beta\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\}$$

$$=n\sum_{j=1}^{m}\left[\begin{array}{l}\left(-k^2w_0^2+2kw_0\right)\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\}\\ +\left\{\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_{ij}^2+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)^2\right\}w_0^2\\ +\frac{-2k}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)w_0^2+\frac{-2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)w_0\end{array}\right]$$

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

$$
= n\left[\begin{array}{l} -k^2\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\} \\ +\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_{ij}{}^2+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)^2\right\} \\ +\frac{-2k}{n^2}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right) \end{array}\right]w_0^2 + n\left[\begin{array}{l} 2k\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\} \\ +\frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right) \end{array}\right]w_0
$$

$$
= n\left(F\cdot w_0^2+G\cdot w_0\right)= nw_0\left(F\cdot w_0+G\right)
$$

ここでGの符号を調べる。Gを以下のように分解する。

$$
G = 2k\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\}+\frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)=G_1+G_2
$$

$$
G_1 = \frac{2k(n-k)}{n}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\left(w'_i x_{ij}\right)^2-\frac{1}{(n-k)^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2\right\}+\frac{2k^2}{n^2(n-k)}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2=G_{11}+G_{12}
$$

G_{11}は分散の合計のため非負となる。ここではG_{12}を調べる。ｉを固定したとき $\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1$ となる条件より、いかなるｉについても値が正となるx_{ij}が１つ以上存在する。また$w'_i(i \geq k+1)$はすべて同じ符号（正）である。よってｊを固定したとき、$\left(\sum_{i=k+1}^{n}w'_i x_{ij}\right)^2>0$ となるｊが１つ以上存在する。従って、$G_{12}>0$ すなわち $G_1>0$
また前提より、$i \geq k+1$ のとき $w_i>0$ となるため、$G_2 \geq 0$ よって、$G>0$
従って、w_0が十分小さい正値のとき、

$$
S_B - S_C = w_0\left(F\cdot w_0+G\right)>0 \quad \text{すなわち} \quad S_B > S_C
$$

これは「解は最小の意思決定ストレス値を持つ」という前提に反する。よって案Bは、解ではない。すなわち解となる格付け値w_i*はすべて正となる。この結論は、

$$
\text{案B}\begin{cases} w'_i=0 & (1\leq i\leq k) \\ w'_i>0 & (k<i\leq n)\end{cases} \qquad \text{の特殊解} \begin{cases} w'_i=0 & (1\leq i\leq n-1) \\ w'_i=1 & (i=n)\end{cases}
$$

も否定する。
以上の結果、解となる格付け値w_i* は常に$0<w_i^*<1$ の値をとる。

（証明終わり）

謝辞
本研究の備考欄で示した$0<w_i^*<1$の証明にあたり、名古屋経済大学経済学部の下村尚司助教授のご助力をいただきました。こころより感謝いたします。

参考文献

[1] T. L. Saaty : *Group Decision Making and the AHP* : *The Analytic Hierarchy Process*, (Springer-Verlag, 1989) 59-67.
[2] P. T. Harker : Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical Modeling*, 9 (11) (1987) 837-848.
[3] 木下栄蔵，中西昌武：ＡＨＰのプロジェクト評価への簡便的適用に関する研究．土木計画学研究・講演集，17 (1995) 691-694.
[4] 山田善靖，杉山学，八巻直一：合意形成モデルを用いたグループＡＨＰ．日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌，40 (2) (1997) 236-243.

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

[5] 上田泰：集団意思決定の２つのプロセスとＧＤＳＳの効果．経営情報学会誌，４ (3) (1995) 65-81.
[6] 佐伯胖：決め方の論理（東京大学出版会，1980).
[7] T. L. Saaty : *The Analytic Hierarchy Process* (McGraw-Hill, 1980).
[8] 中西昌武，木下栄蔵：集団意思決定ストレス・シナリオのＡＨＰへの適用．土木計画学研究・講演集，19-2 (1996) 101-104.
[9] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法～ＡＨＰ入門（日科技連, 1986).
[10] R. Ramanathan and L.S. Ganesh : Energy resource allocation incorporating qualitative and quantitative criteria *: An Integrated Model Using Goal Programmig and AHP* (Indira Gandhi Institute of Development Research, 1996).
[11] 高野伸栄、五十嵐日出夫：階層分析法による地区計画代替案の評価法に関する研究．土木計画学研究・論文集，９ (1991) 245-292.
[12] 中西昌武，木下栄蔵：階層分析法ＡＨＰにおける意思決定ストレスのモデル化に関する研究．土木計画学研究・論文集，13 (1996) 153-160.
[13] 渡辺和雄：コンセンサスにもとづくグループ意思決定支援方式．オペレーションズ・リサーチ，36 (11) (1991) 547-551.
[14] 林知己夫：データ解析法（放送大学教育振興会, 1985).
[15] 安田三郎，海野道郎：社会統計学（丸善, 1977).
[16] 林知己夫：統計の嘘と真，情報の未来学（至文堂, 1977) 99-100.
[17] 木下栄蔵：階層分析法による多目的意思決定問題への適用に関する研究．交通工学，28 (1) (1992) 35-44.
[18] 中西昌武，木下栄蔵：ＡＨＰによるファジィ数量化理論III類の提案．1997年度秋季研究発表会アブストラクト集（日本オペレーションズ・リサーチ学会, 1997) 228-229.

中西昌武
〒484-8504 愛知県犬山市内久保61-1
名古屋経済大学 経済学部
E-mail : nakanishi.masatake@nifty.ne.jp

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

ABSTRACT

AN APPLICATION OF THE GROUP DECISION MAKING STRESS METHOD TO THE GROUP ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

Masatake Nakanishi
Nagoya Keizai University

Eizo Kinoshita
Meijo University

This paper proposes a new method of "group decision making stress" and studies its application to the Analytic Hierarchy Process for the purpose of effective group decision making.

This method grades the evaluators in such a way to minimize the sum total of each evaluator's frustration, the "group decision making stress," without operating the raw data of each evaluator's preference. By rationally grading the participants, those who tend to share similar preferences with others would be graded relatively high and those with unique preferences would be graded relatively low. Every preference, however, is appropriately taken into account, and the result shall be fair. Applications of the method will allow an easier search of groups with similar preferences and help to converge the group preference.

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.