

エネルギー近似を用いた下界値計算法と超音速航空機最短経路問題への応用

花岡照明
東京大学

(受理 1996 年 11 月 11 日 ; 再受理 1997 年 7 月 24 日)

和文概要 動的計画法と分枝限定法を併用した複合アルゴリズム (Hybrid Algorithm) を用いて, 超音速航空機の最適制御問題を効率よく解く方法を提案する. このアルゴリズムは, 超音速飛行を含む航空機の最短時間上昇問題や最小燃料消費問題を最短経路問題に帰着させることにより数値解を統一的な手続きによって求めている. 本法の実行で必要となる下界値は, エネルギー近似法 (Energy-State Approximation Method) を一部修正した方法により求めている. 本論文で提案するアルゴリズムの有効性を示すため, 数値実験として種々のタイプの最短時間上昇問題に適用した結果を示した. これらの数値結果から, エネルギー近似解を一部修正した下界値を用いた複合アルゴリズムは, 超音速航空機の最適制御問題の解を技巧を必要としないで計算することができ, かつ, 計算時間と記憶容量を従来型動的計画法に比べ大幅に削減できることが判明した. また, 本論文では, 問題をいっそう効率よく解くためにいくつかの下界値強化法を提案している. さらに, 問題の境界条件や航空機の主要パラメータが変化した場合に対する本アルゴリズムの頑健性を詳細に調べている.

1. はじめに

現在, 航空機や宇宙往還機などの飛行体の初期設計や性能検討のために, 所与の評価基準のもとで, 最適経路を統一的に求めることのできる手法が強く望まれている. 従来, この種の手法の開発が困難であった主な要因として, 航空機の運動方程式モデルが複雑で, 次元数が多いこと, 高度の非線形性をモデルに含むことなどが上げられる. 特に, 航空機の空力データが表関数で与えられたとき, 微分可能性を仮定する手法の適用が難しいとされる. また, 航空機の運動が状態制約を受ける場合には, 問題を一層複雑にする. この種の問題を扱った研究として, Ardemani[1], Bryson et al.[4], Bryson and Denham[5], Calise[6], Gonzales and Rodrigues[7], Kelley[8] および Rader and Hull[10], 等がある. システムの最適制御に対する必要条件を最大(最小)原理から導いたアプローチでは, 問題は二点境界値問題に帰着され, 問題を解く際に境界値合わせの難しさがある. その解法の多くは, 最急降下法(最急上昇法)[5]による解法を用いるが, この方法は, 厳密解を求めることができるが計算負荷が著しく大きいとされる. システム変数の変化を速いものと遅いものとに分け, 常微分方程式の Singular Perturbation 理論に基づいて近似解を求める Singular Perturbation 法[6]は, 最急降下法に比べ計算負荷が小さいが, 最大の欠点は, 解法上, ある種の安定条件を必要とするため, システムの振る舞いの一般的性質を前もって知る必要がある. 一方, 動的計画法[3]は, 基本的には, どのような複雑なシステムに対しても, 数値的に取り扱うことのできる手段としてよく知られている. さらに, 動的計画法を用いると, 大域的最適解や, フィードバック構造をもつ解が得られること, 制約条件や非線形の取り扱いが容易であること, 状

態の遷移やコスト関数の表現が表関数であってもよいことなど、数多くの望ましい性質を利用できる。しかしながら、動的計画法は、「Bellman の次元の呪い」の問題 [3]、すなわち、状態変数の次元数の増加に伴って計算数が指数関数的に増加し、特別な問題を除き、計算実行上、求解が困難、という致命的な欠陥を持つため、次元数の大きい問題への適用は、きわめて難しいとされる。他方、航空機などの飛行体に対して厳密な最適解を求めることを放棄し、代わりに、より簡単な近似式から航空機の性能を推定する方法として、Bryson et al.[4], Rutowski[11], 等のエネルギー近似 (Energy-State Approximation) を利用する方法がある。この近似法では、運動エネルギーと位置エネルギーの和の保存則を利用してシステムを低次元化しているが、航空機が急降下 (dive) と急上昇 (zoom climb) を起こすところで、高度と速度に不連続点を生じ、現実離れした解となる。このような欠点にも関わらず、エネルギー近似法が今日でも使われる最大の理由は、この近似方程式の次元数が低いため、計算負荷が著しく小さくなることにある。

動的計画法の実行で必要となる計算数とメモリーサイズを低減させる研究として、動的計画法と分枝限定法を併用する方法がある。Morin and Marsten[9] は、離散系の問題に対し、最適解の候補になり得ない状態を削除するために動的計画法と分枝限定法を併用した。

本研究で用いるアイデアは、動的計画法の多くの利点を保存しつつ、かつ、より簡単な手法を併用することによって、動的計画法の計算数を大幅に削減することにある。そのために、今回の複合アルゴリズムでは、その簡単な手法として、エネルギー近似法 (Energy-State Approximation Method) を用いるが、本法におけるエネルギー近似法の使い方は、従来のそれとまったく異なる。従来のエネルギー近似法は、主として航空機の性能推定に使用した。そこでは、解の精度を犠牲にする代わりに、解軌道の形状を簡単な計算で求めることに主眼を置いた。一方、本法は、エネルギー近似法の解軌道の形状を直接利用するのではなく、最適値の下界値を求めるために、例えば、評価基準を飛行時間とした最短時間上昇問題では、その解軌道上を航空機が移動する所要時間のみを利用する。この下界値を使用することにより、従来型動的計画法の計算数を減らした複合アルゴリズムを構築することができる。この使い方では、エネルギー近似解の精度の低さは、本法の解の精度にまったく影響を及ぼさない。

本論文の寄与するところは、第一に、最適制御問題を最短経路問題と見なすことにより、分枝限定法を用いて最適解の候補に成り得ない状態を削除し、動的計画法の計算数を減らしたことである。第二に、従来のエネルギー近似法を下界の条件を満たすように部分修正すれば、簡単な計算で強力な下界値を得ることができることを示したことである。第三の寄与は、状態点の取り方を工夫することにより、従来、動的計画法の応用で最も煩わしかったコスト関数や制御変数の内挿計算を不要にしたことである。

本研究では、エネルギー近似法を、解軌道の精度の観点ではなく、良好な下界値となり得るかの観点から評価する方法も併せて提案している。そこでは、従来のエネルギー近似法による下界値の強度の低い箇所を補正することにより強化している。本研究の目的は、超音速飛行を含む航空機の最適制御問題の解を統一的に求める手法として、複合アルゴリズムを提案し、その特性を明らかにすることにある。

2. 航空機の最適制御問題

いま、航空機を質点と仮定する。図1のように、制御変数に

$\alpha(t)$: 時刻 t における迎角

を、航空機の状態を規定する状態変数に

- $v(t)$: 速度
- $\gamma(t)$: 飛行経路角
- $h(t)$: 高度
- $z(t)$: 基準点からの水平距離
- $m(t)$: 燃料を含む航空機の質量

を用いて航空機の垂直面内での運動を考える。以下、表記の繁雑さを避けるため、 $\alpha(t), v(t), \gamma(t), h(t), z(t), m(t)$ をそれぞれ単に $\alpha, v, \gamma, h, z, m$ と略記する。

性能を比較するための一つの指標として飛行時間 J を用いると、航空機の最短時間上昇問題(原問題)は、

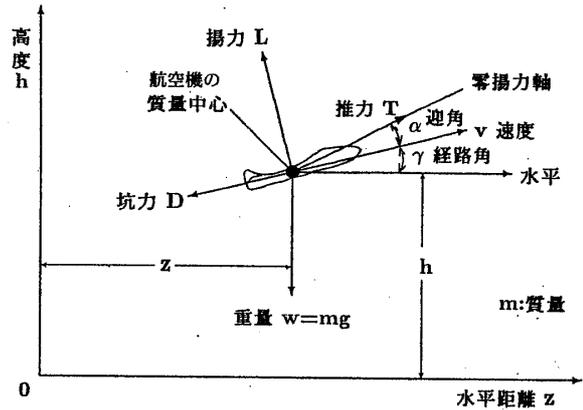


図1 航空機の状態量の定義

原問題 P:

$$\text{Minimize } J = \int_{t_0}^{t_f} dt \tag{2.1}$$

$$\text{Subject to } m\dot{v} = T(h, v) \cos \alpha - D(h, v, \alpha) - mg \sin \gamma \tag{2.2}$$

$$mv\dot{\gamma} = T(h, v) \sin \alpha + L(h, v, \alpha) - mg \cos \gamma \tag{2.3}$$

$$\dot{h} = v \sin \gamma \tag{2.4}$$

$$\dot{z} = v \cos \gamma \tag{2.5}$$

$$\dot{m} = -F(h, v) \tag{2.6}$$

$$v(t_0) = v_0, \quad v(t_f) = v_f \tag{2.7}$$

$$\gamma(t_0) = \gamma_0, \quad \gamma(t_f) = \gamma_f \tag{2.8}$$

$$h(t_0) = h_0, \quad h(t_f) = h_f \tag{2.9}$$

$$z(t_0) = z_0, \quad z(t_f) = z_f \tag{2.10}$$

$$m(t_0) = m_0, \quad m(t_f) = m_f \tag{2.11}$$

$$v \in V, \quad \gamma \in \Gamma, \quad h \in H, \quad z \in Z, \quad m \in W, \quad \alpha \in U \tag{2.12}$$

と表すことができる(たとえば, Bryson and Denham[5] に示されている)。ただし, 添字 $0, f$ によって, それぞれ初期時刻および終端時刻における変数の値を表すことにし, (2.7) ~ (2.11) 式はそれぞれ航空機の初期状態と終端状態を与える境界条件である。その他の記号は,

- $T(h, v)$: 航空機エンジンの推力 (表関数で所与)
- $D(h, v, \alpha)$: 抗力
- $L(h, v, \alpha)$: 揚力
- $F(h, v)$: 燃料流量率
- g : 重力加速度 (一定)
- t : 時間

を表す。一方, これらの中で, 抗力と揚力は, それぞれ関係式

$$D(h, v, \alpha) = C_D(\alpha, M)\rho v^2 S/2, \quad L(h, v, \alpha) = C_L(\alpha, M)\rho v^2 S/2$$

を用いて計算する。ここで、各記号は、

$$\begin{aligned}
 C_D(\alpha, M) &= C_{D0}(M) + \eta(M)C_{L\alpha}(M)\alpha^2: \text{抗力係数}, & C_L(\alpha, M) &= C_{L\alpha}(M)\alpha: \text{揚力係数} \\
 C_{D0}(M) &: \text{零揚力抗力係数 (表関数)}, & C_{L\alpha}(M) &: \text{揚力傾斜 (表関数)} \\
 \eta(M) &: \text{誘導効力パラメータ (表関数)}, & \rho &= \rho(h): \text{空気密度 (表関数)} \\
 M &= v/a: \text{マッハ数}, & S &: \text{空力基準面積} \\
 a &= a(h): \text{音速 (表関数)}
 \end{aligned}$$

を表す。ただし、多くの場合、燃料流量率 $F(h, v)$ は、関係式

$$F(h, v) = \frac{T(h, v)}{I_{sp}g}$$

を用いて計算する。ここで、 I_{sp} は単位時間当り単位重量の推進薬（燃料）が消費されるときに発生する推力として定義される量（比推力）であり、エンジンの性能、推進薬の優劣に関する基本量である。このとき、求めるものは、飛行時間 J を最小化する迎角 $\alpha(t)$ の制御列である。

最小燃料消費問題も、(2.1) 式の評価関数を

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |\dot{m}| dt \quad (2.13)$$

で置き換えれば同様に定式化できるので、以後は最短時間上昇問題に限って話を進める。推力 $T(h, v)$ 、零揚力抗力係数 $C_{D0}(M)$ および揚力傾斜 $C_{L\alpha}(M)$ を表関数で与えた数値例を第 6 章で示す。

3. エネルギー近似法と動的計画法

3.1. エネルギー近似法

この方法は、与えられた最短時間上昇問題 P を最適制御問題としてそのまま解く代わりに、次のような近似を用いて航空機の性能を推定する方法である。

いま、航空機の単位質量当りの総エネルギー E が、その運動エネルギーと位置エネルギーの和

$$E = \frac{1}{2}v^2 + gh \quad (3.1)$$

で表されると仮定する。図 2 はエネルギー近似法 の概念図である。この図では (3.1) 式 の関係を、 E が一定（したがって、エネルギー高度 E/g が一定）の等高線として、 (h, v) 平面上に描き、初期点 A から終端点 B への最短時間上昇経路の典型例を示してある。この近似法では、航空機の移動を物理的な点から点への移動と考えるよりも、むしろ各エネルギー等高線間での移動と見なしている。また、等エネルギー線に沿った移動は零時間移動が可能であると仮定している。一方、 E の時間変化率は (3.1) 式を微分した結果に (2.2), (2.4) 式を代入すると得られ、

$$\dot{E} = \frac{v(T(h, v) \cos \alpha - D(h, v, \alpha))}{m} \quad (3.2)$$

となる。もし、一つの状態変数 E から成る (3.2) 式だけを用いて、飛行性能を推定できれば具合いがよい。そこで、エネルギー近似法では、迎角 α は微小、飛行経路に垂直な加速度成分 $v\dot{\gamma}$ は無視可能、飛行はほぼ水平飛行と仮定し、

$$\sin \alpha \cong 0, \quad \cos \alpha \cong 1, \quad v\dot{\gamma} \cong 0, \quad \cos \gamma \cong 1$$

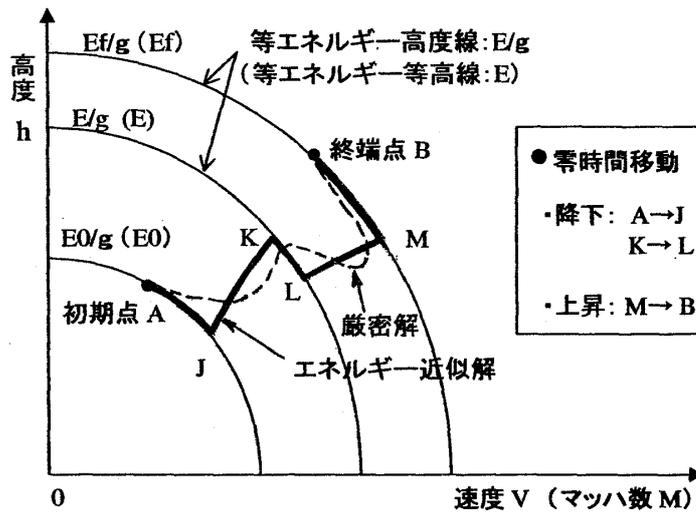


図2 エネルギー近似の概念図

の近似を行う。これらの近似により (2.3) 式は簡単化され、

$$L(h, v, \alpha) \cong mg \tag{3.3}$$

となる。Lは α に関し1次式であることを考慮すると、 α は h と v の項で容易に表すことができる。同様にして、抗力 D も h と v の項で表せる。さらに(3.1)式を用いると、 h は E と v の項で表せるから、結局、(3.2)式は、推力 T と抗力 D を、それぞれエネルギー E と速度 v の関数とみなすと、

$$\dot{E} \cong \frac{v(T(E, v) - D(E, v))}{m} \tag{3.4}$$

となる。エネルギー近似法では航空機の質量 m を一定と仮定し、(2.1)式の評価関数の代わりに

$$J^E = \int_{t_0}^{t_f} dt = \int_{E_0}^{E_f} \frac{1}{\dot{E}} dE \cong \int_{E_0}^{E_f} \frac{m}{v(T(E, v) - D(E, v))} dE \tag{3.5}$$

を用いる。

このとき、求めるものは、(3.5)式の評価関数 J^E を最小化する速度 $v(E)$ ($E_0 \leq E \leq E_f$)の制御列である。エネルギー近似法を用いて、時刻 t_0 での高度 h_0 と速度 v_0 の初期点Aから、指定された高度 h_f と速度 v_f の終端点Bに最小時間で上昇するには、等エネルギー線(等高線)に沿った移動が零時間であることを考慮すると、図2で初期点Aを含む等エネルギー線から終端点Bを含む等エネルギー線に至るまでの各等高線 E で \dot{E} を v に関し最大化すればよい。すなわち、図2において $A \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow B$ のような軌道が最適な制御列となる。

3.2. 従来型動的計画法

航空機の最短時間上昇問題(原問題P)を動的計画法を用いて解くことを考える。用語の混乱を避けるために、状態の遷移方向(通常は時間の増加方向)に関して後向きに計算が進行する場合を後向き動的計画法、一方、前向きに計算が進行する場合を前向き動的計画法と表記する。

一般に、制御量 α を離散化すれば、システムの動きを微分方程式で記述した、いわゆる連続型の最適制御問題も離散型として定式化できるので、以後、原問題Pを離散型に変換して動的計画法を適用することにする。ただし、本研究の飛行経路の最短時間上昇問題では、独立変数を時間 t とするよりも、エネルギー近似法に合わせて、エネルギー E にした方が便利であるので、原問題P(2.1)~(2.12)式の独立変数を t から E に変換して動的計画法を適用する。したがって、A-B間のエネルギー差を N 段に分け、それらの各段のエネルギー高度を段変数にとる。

いま、エネルギーに関し離散化した各段 $k(k=0,1,\dots,N)$ での航空機の状態を、状態変数 $\mathbf{x}_k=(v_k, \gamma_k, h_k, z_k, m_k)'$ を用いて表すことにする。また、制御変数を α_k とする。ただし、 \prime はベクトルの転置を表わす。このとき、原問題Pを、

$$\text{Minimize } J = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(\mathbf{x}_i, \alpha_i) + \Phi_N(\mathbf{x}_N) \quad (3.6)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k) \quad (k=0, \dots, N-1) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{x}_N \in \Omega_F \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x}_k \in X_k \quad (k=1, \dots, N-1) \quad (3.10)$$

$$\alpha_k \in U(\mathbf{x}_k) \quad (k=0, \dots, N-1) \quad (3.11)$$

と書き換えることができる。ただし、 $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k)$ は航空機の状態遷移関数であり、

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k) = \begin{bmatrix} v_k + \int_{E_k}^{E_{k+1}} \frac{T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k) - mg \sin \gamma}{v(T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k))} dE \\ \gamma_k + \int_{E_k}^{E_{k+1}} \frac{T(h,v) \sin \alpha_k + L(h,v, \alpha_k) - mg \cos \gamma}{v^2(T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k))} dE \\ h_k + \int_{E_k}^{E_{k+1}} \frac{m \sin \gamma}{T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k)} dE \\ z_k + \int_{E_k}^{E_{k+1}} \frac{m \cos \gamma}{T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k)} dE \\ m_k - \int_{E_k}^{E_{k+1}} \frac{m F(h,v)}{v(T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k))} dE \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

と表記できる。また、 $L_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k)$, $k=0,1,\dots,N-1$ は、1段当りのコスト関数として定義される量であり、単位エネルギー区間を通過する航空機の飛行時間を表し、

$$L_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k) = \int_{E_k}^{E_{k+1}} \frac{m}{v(T(h,v) \cos \alpha_k - D(h,v, \alpha_k))} dE \quad (3.13)$$

と表記できる。ただし、最終段でのコスト関数を $\Phi_N(\mathbf{x}_N)$ としているが、問題Pでは $\Phi_N(\mathbf{x}_N)=0$ である。また、 X_k と $U(\mathbf{x}_k)$ を、それぞれ k 段での許容状態集合と許容制御集合とする。一方、(3.8)と(3.9)式は、それぞれ、初期条件と終端条件である。ここで、 $\Omega_F(\Omega_F \subset X_N)$ を終端条件を満たす集合とする。

上記の問題を従来型(後向き)動的計画法[3]を用いて解くには、各段 $k(k=0,1,\dots,N)$ でのすべての許容状態 $\mathbf{x}_k \in X_k$ に対して動的計画法の再帰関数方程式を適用し、それらの状態 \mathbf{x}_k の最適制御 α_k^* を計算する。この再帰関数方程式は、 k 段以後の最小コスト関数を

$$J_k(\mathbf{x}_k) = \min_{\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{N-1}} \left\{ \sum_{i=k}^{N-1} L_i(\mathbf{x}_i, \alpha_i) + \Phi_N(\mathbf{x}_N) \right\}$$

と定義すると, Bellman の最適性の原理 [3] から,

$$J_N(\mathbf{x}_N) = \Phi_N(\mathbf{x}_N)$$

$$J_k(\mathbf{x}_k) = \min_{\alpha_k \in U(\mathbf{x}_k)} \{L_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k) + J_{k+1}(\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k))\} \quad (k = 0, \dots, N-1) \quad (3.14)$$

と書くことができる. この (3.14) 式から最適方策を解析的に求めることは多くの場合難しいので, 通常, 数值的に解くことになる.

(3.14) 式を解くには, 通常, 各状態変数 $x_k^i (i = 1, 2, \dots, n)$ を l_x レベルに, また, 制御変数 $\alpha_k^j (j = 1, 2, \dots, m)$ を l_u レベルに量子化する. そして, 状態ベクトルの n 次元格子の各点において量子化した制御を適用し, (3.14) 式を用いて格子点での $J_k(\mathbf{x}_k)$ と最適制御 α_k^* を求める. もし, この計算で, 次段の状態 $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k)$ が格子点上に無い場合は, 格子点での $J_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})$ を用い, 内挿によって $J_{k+1}(\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k))$ を計算する. 状態変数の次元数 n が大きいとき, この内挿計算は相当煩わしい. (3.14) 式の計算は $k = N-1$ から始め, 後向きに, $k = 0$ まで再帰的に行う.

従来型動的計画法を適用する上で最も難しいことは, 状態変数 \mathbf{x}_k の次元数の増加に伴ってメモリーサイズ (データの格納領域) と計算数が飛躍的に増大することである. これは, 状態ベクトルを量子化することに起因する. 本論文で扱っている航空機の最適制御問題は定義域の次元数が $n = 5$ であるから, たとえば, エネルギーの段数が $N = 10$ で, \mathbf{x}_k の各要素当り $l_x = 20$ レベルに量子化したとき, (3.14) 式の右辺を評価するために計算機メモリーに格納する必要がある $J_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})$ の格子点の数は $l_x^n = 20^5 = 3,200,000$ 個である. また, $J_k(\mathbf{x}_k)$ と α_k^* の計算を必要とする格子点の総数 (計算領域) は $l_x^n \cdot N = 20^5 \times 10 = 32,000,000$ 個となる. もし, 制御変数の許容領域を $l_u = 10$ レベルに量子化したとすれば, コスト関数の総計算数は, $l_x^n \cdot N \cdot l_u = 20^5 \times 10 \times 10 = 320,000,000$ 個となる. 量子化レベルをさらに増やしたとき, 従来型動的計画法によるアプローチでは事実上, 計算が実行不可能に陥る.

さらに, コスト関数 L_k や状態遷移関数 \mathbf{g}_k の値を計算するのに, 通常, (3.12) 式や (3.13) 式に見られるような積分の代わりに, 1 段当りのエネルギー増分 $\Delta E = (E_f - E_0)/N$ を差分とした有限差分近似を用いるため, これに起因する誤差の蓄積を無視できない. 以下に述べる複合アルゴリズムでは, 従来型動的計画法の利点を保存しつつ, かつ, 従来型動的計画法が持つそれらの欠点を緩和することに主眼を置いている.

4. 複合アルゴリズム

従来型動的計画法は, 状態の遷移方向 (通常は, 時間の増加方向) に関し, 後向きに定式化している. これは, 「後向き」最適性の原理 [3] を用いたことによる. 一方, 複合アルゴリズムで用いる前向き動的計画法は, この原理を, 時間に関して前後を逆にした「前向き」最適性の原理に基づき, 初期点から前向きに定式化する.

いま, 量子化した許容制御 $\alpha_k \in U(\mathbf{x}_k)$ を初期点 \mathbf{x}_0 から, 各段 k で繰り返し適用してできる, 初期点からの実行可能経路集合を考え, $\{X_k^\circ\} = \bigcup_{i=0}^k X_i^\circ$ とおく. ただし, X_k° は, 再帰的に定義され, $X_0^\circ = \{\mathbf{x}_0\}$, $X_{k+1}^\circ = \{\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \alpha_k), \mathbf{x}_k \in X_k^\circ, \alpha_k \in U(\mathbf{x}_k)\} (k = 0, \dots, N-1)$ とする. また, \mathbf{g}_k を状態遷移関数とする. この経路群は初期点からの枝構造をもつ. このような, 状態点の決め方, すなわち, k 段の状態点 $\mathbf{x}_k \in X_k^\circ$ を押し出すことによって, $k+1$ 段の状態点 $\mathbf{x}_{k+1} \in X_{k+1}^\circ$ を確定させる計算を, 「押し出し計算」と呼ぶことにする. ここで, 計算上の工夫として, 前向き動的計画法でのすべての計算点を, 押し出し計算によって, この実行可能経路 $\{X_k^\circ\}$ 上にとり, かつ, コスト関数の計算と比較を, 正確にこの

経路上のコスト値を用いて行うことを考える. このような処理では, コスト関数の内挿計算を含まない. しかし, このままでは, 段数 N が大きいとき, 実行可能経路数の巨大化を招く. この巨大化を避けるため, 次節では, 量子化について考察する.

4.1. 量子化手続きと前向き動的計画法

複合アルゴリズムでは, 前向き動的計画法を適用するのに, 許容状態集合 X_k を, $X_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} X_{ki}$, $X_{ki} \cap X_{kj} = \emptyset (i \neq j)$ となるように, 適当な部分集合 $X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kn_k}$ に量子化する. 以後, この部分集合 X_{ki} を, 「ブロック」と呼ぶことにする. 各ブロック X_{ki} に対し, 初期点 \mathbf{x}_0 からの経路が存在する場合のみ, 一個ずつ代表点 $\mathbf{x}_{ki} (\in X_{ki})$ とそのコスト関数の値を以下のように定義する. すなわち,

$$f_k(\mathbf{x}_{ki}) = \min_{\mathbf{x}_k} \{T(\mathbf{x}_k) \mid \mathbf{x}_k \in X_{ki}\} \quad (i = 1, \dots, m_k, k = 0, \dots, N) \quad (4.1)$$

とする. ここで, $T(\mathbf{x}_k)$ は, 前段の代表点 $\mathbf{x}_{k-1i} (\mathbf{x}_{k-1i} \in X_{k-1i})$ に, 量子化した各 $\alpha_{k-1} \in U(\mathbf{x}_{k-1i})$ を適用し, 式,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_0) &= 0 \\ T(\mathbf{x}_k) &= f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1i}) + L_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1i}, \alpha_{k-1}) \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1i}, \alpha_{k-1}) \quad (i = 1, \dots, m_k, k = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.2)$$

を用い, 押し出し計算によって計算する. ここで, L_k を 1 段当りのコスト関数とする. ただし, 便利さのため, 最終段 N でのコスト $\Phi_N(\mathbf{x}_N)$ を, $N-1$ 段でのコスト L_{N-1} に含めて考える. また, $m_k (m_k \leq n_k)$ を, k 段の代表点の数とする. この代表点 \mathbf{x}_{ki} が, 初期点 $\mathbf{x}_0 (\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{01})$ から, k 段の各ブロック上での到達点までの経路の中で, 対応するコスト関数の値が (各ブロックの中で) 最小となる点であり, 初期点から再帰的に計算できる. このような代表点におけるコスト関数の最小値を最小コスト関数と呼び, 代表点 \mathbf{x}_k の関数として $f_k(\mathbf{x}_k)$ とおく. このとき, 有限個の代表点 $X_k^\circ = \{\mathbf{x}_{k1}, \mathbf{x}_{k2}, \dots, \mathbf{x}_{km_k}\} (k = 0, \dots, N)$ 上で考慮した前向き動的計画法が成立する. すなわち,

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}_{01}) &= 0 \\ f_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1i}) &= \min_{\mathbf{x}_{ki}, \alpha_k} \{f_k(\mathbf{x}_{ki}) + L_k(\mathbf{x}_{ki}, \alpha_k) \mid \mathbf{x}_{ki} \in X_k^\circ, \alpha_k \in U(\mathbf{x}_{ki})\} \\ \mathbf{x}_{k+1i} &= \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_{ki}, \alpha_k) \quad (i = 1, \dots, m_k, k = 0, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

とする.

一方, 代表点以外の各ブロック内の状態点の最小コスト関数の値は, 代表点の値で近似し,

$$\text{もし } \mathbf{x}_k \in X_{ki} \text{ ならば, } f_k(\mathbf{x}_k) = f_k(\mathbf{x}_{ki}) \quad (i = 1, 2, \dots, m_k, k = 0, 1, \dots, N-1)$$

とする.

4.2. 優先順位計算

複合アルゴリズムの計算は, 初期点から前向きに進行する. 初期点および各段の代表点では, 量子化した制御を適用し, 枝構造をもった最適経路候補群を繰り返し生成させる. この際, (4.2) 式によって計算されるコスト関数値 $T(\mathbf{x}_k)$ の小さい順に, 各経路がブロックに到

着するように処理する。以後、この処理を優先順位計算と呼ぶことにする。このようにすると、代表点の定義により、ブロックに最初に到着した経路がそのブロックの代表点となる。それ以後に到着するいかなる経路も代表点となることはできないから、それらを削除できる。このアルゴリズムは、初期点からの経路のいずれかが、終端条件を満たす状態集合 Ω_F に最初に到着したとき終了する。このとき、この先着経路が最適経路となる。この先着経路に対応する最適コストを

$$f_{0,N}^* = \min_{\mathbf{x}_N} \{f_N(\mathbf{x}_N) \mid \mathbf{x}_N \in \Omega_F\} \quad (4.4)$$

と定義することにする。

4.3. 限定操作とクリアランス

複合アルゴリズムでは、前向き動的計画法の計算数を削減するために、分枝限定法の限定操作を使う。

いま、(3.14)式の最小コスト関数 $J_k(\mathbf{x}_k)$ の下界値を $M_k(\mathbf{x}_k)$ とし、また、原問題P(2.1)～(2.12)式下での最終最適解 $f_{0,N}^*$ (4.4)式の上界値を I (暫定解)とする。分枝限定法での暫定値は、通常、計算の進行に伴って得られた上界値の最小の値で改良するが、このアルゴリズムでの暫定値は、計算終了まで更新しない。これらの下界値と上界値が満たすべき条件は、それぞれ

$$\begin{aligned} M_k(\mathbf{x}_k) &\leq J_k(\mathbf{x}_k), & \mathbf{x}_k &\in X_k \\ &= \min_{\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{N-1}} \sum_{i=k}^{N-1} L_i(\mathbf{x}_i, \alpha_i) & (k = 0, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$I \geq f_{0,N}^* \quad (4.6)$$

で与えられる。よく知られているように、もし、

$$f_k(\mathbf{x}_k) + M_k(\mathbf{x}_k) > I \quad (k = 0, \dots, N) \quad (4.7)$$

ならば、状態 \mathbf{x}_k を通る経路について、

$$f_k(\mathbf{x}_k) + J_k(\mathbf{x}_k) \geq f_k(\mathbf{x}_k) + M_k(\mathbf{x}_k) > I \geq f_{0,N}^*$$

が成り立つ。よって、代表点 \mathbf{x}_k は最適経路の一部になれないから削除してよい。ただし、 $f_0(\mathbf{x}_0)$ は、(4.2)式より $f_0(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{x}_0) = 0$ である。また、ここでは、最終段 N でのコスト $\Phi_N(\mathbf{x}_N)$ を、 $N-1$ 段でのコスト L_{N-1} に含めて考えたから、形式的に、 $J_N(\mathbf{x}_N) = 0$ とする。したがって、 $M_N(\mathbf{x}_N) = 0$ とおく。削除できる代表点 \mathbf{x}_k の数を増やすには、(4.7)式から明らかのように、上界値 I をより小さな値へ、一方、下界値 $M_k(\mathbf{x}_k)$ をより大きな値へと強化すればよい。ここで、上界値と下界値の強さを表わす量として、それぞれ、 Δa および Δb_k を導入し、

$$\Delta a = I - f_{0,N}^*, \quad \Delta b_k = J_k(\mathbf{x}_k) - M_k(\mathbf{x}_k) \quad (4.8)$$

とおく。(4.8)式の I と $M_k(\mathbf{x}_k)$ を(4.7)式に代入すると

$$f_k(\mathbf{x}_k) + J_k(\mathbf{x}_k) > f_{0,N}^* + \Delta a + \Delta b_k \quad (4.9)$$

となる。(4.9)式より、複合アルゴリズムの計算数は、 Δa や Δb_k の個別の値というよりも、それらの和 $\Delta \epsilon$ ($\Delta \epsilon = \Delta a + \Delta b_k$)に依存する。以後、この和 $\Delta \epsilon$ をクリアランスと呼ぶことに

する。複合アルゴリズムを用いて大域解を得るには、(4.5),(4.6)式の制約を満たす有効な下界値と上界値を計算できなくても、より緩和された、大域解を得るためのクリアランスの条件、すなわち、

$$\Delta\epsilon = \Delta a + \Delta b_k \geq 0 \quad (4.10)$$

を満足すればよい。ここで、この複合アルゴリズムの計算数が最小となるのは、 $\Delta\epsilon = \Delta a + \Delta b_k = 0$ のときである。

複合アルゴリズムの、飛行体の最適制御問題への応用では、下界値 $M_k(\mathbf{x}_k)$ を上述のエネルギー近似法を一部修正した修正エネルギー近似法(後述)を用いて求める。また、上界値 I を、状態空間 X_k と制御変数の定義域の粗い離散化の下で、複合アルゴリズムを適用したときの最適解から求める。このときの下界値は、修正エネルギー近似法による解を、再計算なしで用いることができる。一方、上界値は、修正エネルギー近似法による解を上界値の下界として利用することで、上界値の許容範囲の絞り込みと複合アルゴリズムの数回の試行によって求めることができる。

4.4. 緩和問題と修正エネルギー近似法

航空機の最適経路を複合アルゴリズムを用いて求める際に、必要となる原問題の下界値をエネルギー近似法によって求めることを考える。

いま、原問題 P の (2.2) 式の両辺に (v/m) を掛け、(2.4) 式の両辺に g を掛けて辺々を加えると、

$$v\dot{v} + g\dot{h} = \frac{v(T(h, v) \cos \alpha - D(h, v, \alpha))}{m} \quad (4.11)$$

が得られる。(4.11) 式は合成式であるから、元の 2 つの制約式 (2.2),(2.4) 式よりも緩和した制約となる。この式の両辺を積分し、初期条件より積分定数を決めてやると、

$$\frac{1}{2}v^2 + gh = \int \frac{v(T(h, v) \cos \alpha - D(h, v, \alpha))}{m} dt + \frac{1}{2}v_0^2 + gh_0 \quad (4.12)$$

となる。(4.12) 式の左辺は (3.1) 式の総エネルギー E にほかならない。よって、(4.12) 式を微分して得られる \dot{E} 、すなわち (3.2) 式で、原問題の (2.2) 式と (2.4) 式を置き換えた制約式は、原問題の制約条件を緩和している。

エネルギー近似法は原問題の微分方程式の次元を状態変数 1 個に下げるので、原問題よりもはるかに容易に解くことができる。しかし、この近似法は迎角 α を (3.3) 式で近似し、(3.4) 式を導出しているため、厳密な意味で原問題の緩和問題になっていない。そこで、以下の修正を行うことにする。

いま、原問題 P の緩和問題を導くため、(3.2) 式で $\alpha = 0$ とし、抗力 D が M, h および α の関数であること、さらに、 M と h が共に E と v の関数であることを考慮し、抗力を

$$\begin{aligned} D(E, v, \alpha) &= \frac{1}{2}(C_{D0}(E, v) + \eta(E, v)C_{L\alpha}(E, v)\alpha^2)\rho(E, v)v^2S \\ &\geq \frac{1}{2}C_{D0}(E, v)\rho(E, v)v^2S = D'(E, v) \end{aligned}$$

で近似することを考える。ただし、 $C_{L\alpha}(E, v) \geq 0$ 、 $\eta(E, v) \geq 0$ とする。このとき、常に

$$T(E, v)\cos\alpha - D(E, v) \leq T(E, v) - D'(E, v) \quad (4.13)$$

が成り立つことは明かであり, (4.13) 式の右辺の逆数は左辺の逆数の下界値を与える. さらに, 航空機はロケットと異なり, 燃料消費による質量変化が最適経路に影響する度合はかなり小さいが, 厳密な下界値を得るために, (3.2) 式での燃料を含んだ航空機の質量 m の代わりに, 燃料を除く質量 m_b (一定) を用いる. この値は m の下限値である. これらの修正の下での緩和問題 E

緩和問題 E: 修正エネルギー近似法

$$\text{Minimize } J^M = \int_{E_0}^{E_f} \frac{m_b}{v(T(E, v) - D'(E, v))} dE \quad (4.14)$$

$$(\leq \int_{t_0}^{t_f} dt)$$

は, 原問題の評価関数 (2.1) 式の値を常に小さく評価することは明らかである. また, $\alpha = 0$ と $D'(E, v)$, および, m_b による近似のどの様な組み合わせを用いても, それらに対応する緩和問題は下界値を与えることになる.

修正エネルギー近似法 (Modified Energy-State Approximation Method) は, (E, v) 平面で各 E 毎に評価関数 (4.14) 式の被積分関数を最小とするような v を用い, 原問題 P の解を近似する方法である. すなわち, 与えられた初期点から終端点への最短時間上昇経路は, 初期点を含む等エネルギー線 E_0 から終端点を含む等エネルギー線 E_f に至るまでの各等高線上で $v(T(E, v) - D'(E, v))$ を最大にするように, それぞれの E 毎に v を選ばばよい. これは,

$$\max_v \{v(T(E, v) - D'(E, v))\}$$

と表現できる. 修正エネルギー近似法では, 隣接する各等高線間の最短移動時間で, そのエネルギー区間の移動時間を代表させる. 下界値は, 航空機の通過区間に対応する最小移動時間の総和で表される. 修正エネルギー近似法でも, 等エネルギー線上の移動は零時間移動が可能であるとしている. この移動は異なる高度と速度への瞬時の移動であり, 現実な経路と異なるが, 下界値として用いるには何ら支障はない. 図 3 に単位エネルギー区間 (すなわち, 単位エネルギー高度) を通過するのに要する時間を示してある. この図より, 航空機の急降下と急上昇を除く部分では, 修正エネルギー近似解は原問題 P の最適解とよく一致している. 逆説的に言えば, 修正エネルギー近似法は, 初期点および終端点付近では精度が低く, 何らかの方法でこの部分の補正が必要である. これについては 5 章で議論する.

4.5. 複合アルゴリズム

複合アルゴリズムは, 次の 10 ステップに要約できる.

1. (境界条件の設定): E_0 と E_f の間を N 分割し, それらの分割面を $k (k = 0, 1, \dots, N)$ とする. 初期条件および終端条件を設定する.
2. (状態集合の量子化): 各段 $k (k = 0, 1, \dots, N)$ の状態空間 X_k を, n_k 個のブロック $X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kn_k}$ に分割する (ただし, $X_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} X_{ki}$, $X_{ki} \cap X_{kj} = \emptyset (i \neq j)$).
3. (上下界値の計算): 各 $k = 0, \dots, N$ に対し, 修正エネルギー近似法を用いて, 適当な $\mathbf{x}_k \in X_k$ に対する下界値 $M_k(\mathbf{x}_k)$ を計算する. また, 一つの上界値 I を, $\Delta\epsilon \geq 0$ と

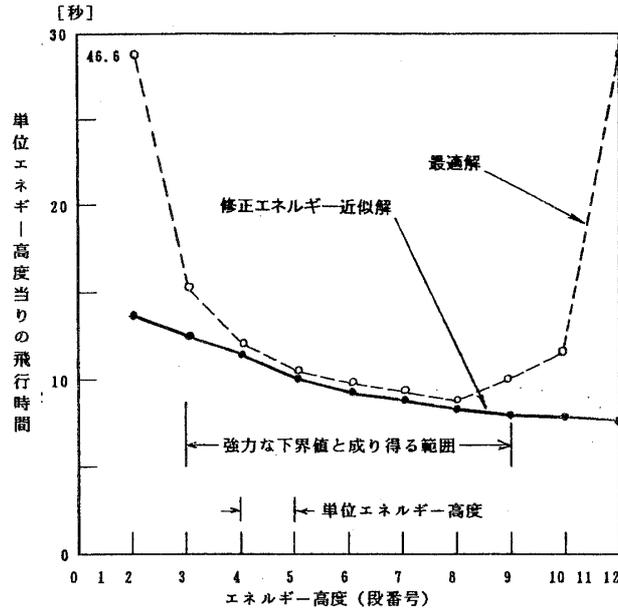


図3 修正エネルギー近似の下での単位エネルギー高度通過時間

るように，設定する．

4. (初期化): 初期設定 $\Omega \leftarrow \{x_0\}$, $T(x_0) = 0$, $\mathfrak{R} \leftarrow \emptyset$ を行う (\mathfrak{R} は, そこまでの最小コスト経路が確定したブロックの集合を表す).
5. (停止): もし $\Omega = \emptyset$ なら停止せよ.
6. (前向き動的計画法): Ω の中から $T(x^*)$ の値が最小である x^* を選び, $\Omega \leftarrow \Omega \setminus \{x^*\}$ とせよ. そして, x^* が属する段の値を k にセットし, $x_k^* \leftarrow x^*$ とせよ (\setminus は差集合の演算子).
7. (終端テスト): もし x_k^* が終端条件を満たすなら, 停止せよ (この段階で最適解が得られる).
8. (代表点テスト): もし $[x_k^*] \in \mathfrak{R}$ ならばステップ 5 へ行け. それ以外は $\mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{R} \cup \{[x_k^*]\}$ とし, ステップ 9 へ行け ($[y]$ は状態 y を含むブロックを示す. この段階で, x_k^* に到達させる最適制御 α_{k-1}^* が確定する. また, 最小コスト関数の候補値 $T(x_k^*)$ は, 真の最小コスト関数値 $f_k(x_k^*)$ となる).
9. (分枝限定操作): 量子化した各 $\alpha_k \in U(x_k^*)$ に対して, 次段の状態 x_{k+1} および最小コスト関数の候補値 $T(x_{k+1})$ を, $x_{k+1} = g_k(x_k^*, \alpha_k)$, $T(x_{k+1}) = T(x_k^*) + L_k(x_k^*, \alpha_k)$ とする. そして, もし各 x_{k+1} に対し $T(x_{k+1}) + M_{k+1}(x_{k+1}) \leq I$ ならば, $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{x_{k+1}\}$ とせよ.
10. ステップ 5 へ行け.

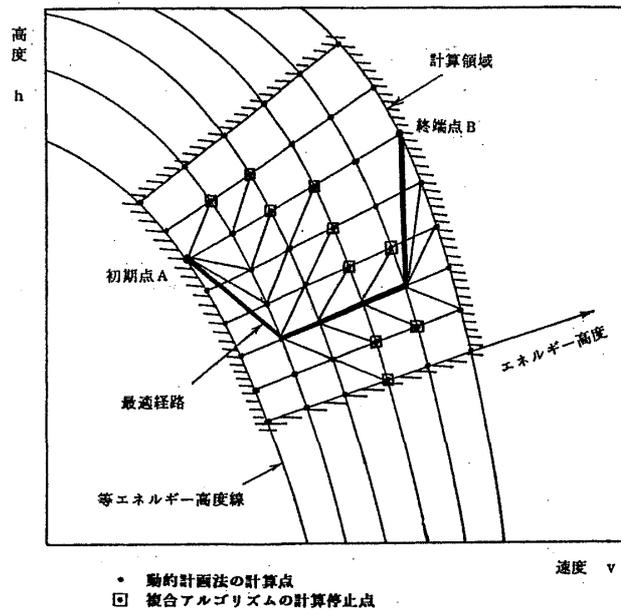


図4 複合アルゴリズムの概念図

ステップ6で \mathbf{x}^* を選択するとき、 \mathbf{x} をそれらに対応する最小コスト関数の候補値のサイズの順序に整列しておくこと、探索の手間を削減できる。また、ステップ9で $[T(\mathbf{x}_{k+1}) + M_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) \leq I]$ の代わりに $[T(\mathbf{x}_{k+1}) + M_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) \leq I \text{ かつ } [\mathbf{x}_{k+1}] \in \mathcal{R}]$ とすると、 Ω に格納する状態点の数を減らすことができ、データの記憶容量や探索の手間を削減できる。しかし、反面、 $[\mathbf{x}_{k+1}] \in \mathcal{R}$ であるかどうかの判定回数を増加させるため、実際には両者のトレードオフとなる。

一般に、状態変数や制御変数の定義域における量子化幅を粗くとると、アルゴリズムによって生成される経路群が終端条件を満たせなくなって、計算が停止してしまう可能性がある。この現象に対処するため、終端条件が満たされないほど終端段のコスト値が大きくなるようなペナルティ関数 $P(\mathbf{x}_N)$ を導入する。そして、元の評価関数にこのペナルティ関数項を加えた新しい評価関数

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(\mathbf{x}_i, \alpha_i) + \mu P(\mathbf{x}_N) \tag{4.15}$$

ここで、

$$P(\mathbf{x}_N) = \Psi(\mathbf{x}_N)^T \Psi(\mathbf{x}_N) \tag{4.16}$$

の下で、終端条件のない最小化問題を解く。ここで、 $\Psi(\mathbf{x}_N) = \mathbf{0}$ は原問題の終端条件であり、 μ は十分大きな正定数とする。このとき、量子化単位を細かくするほど、最適経路は終端条件を満たすように改善される。

複合アルゴリズムの概念図を図4に示す。図の中で小さな四角形に囲まれた点は、複合アルゴリズムによる初期点からの計算過程で最適経路の一部になり得ないことが判明し、限定操作により計算停止になったことを示す。

5. 下界値の強化

制約式を原問題 P の制約式の一部に限定した次の緩和問題

緩和問題 G:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J &= \int_{t_0}^{t_f} dt \\ \text{Subject to } m\dot{v} &= T(h, v) \cos \alpha - D(h, v, \alpha) - mg \sin \gamma \\ \dot{h} &= v \sin \gamma \end{aligned}$$

を考える。ここで、抗力 D は

$$D(h, v, \alpha) = \frac{1}{2}(C_{D0}(M) + \eta(M)C_{L\alpha}(M)\alpha^2)\rho(h)v^2S$$

と表すことができるから、この問題の Hamilton 関数 [2] を、

$$\begin{aligned} H &= 1 + \dot{v}p_1 + \dot{h}p_2 \\ &= \frac{1}{m}(T(h, v) \cos \alpha - \frac{1}{2}\eta(M)C_{L\alpha}(M)\alpha^2\rho(h)v^2S)p_1 \\ &\quad + (vp_2 - gp_1) \sin \gamma - \frac{1}{2m}C_{D0}(M)\rho(h)v^2Sp_1 + 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

と書くことができる。ただし、 $C_{L\alpha}(M) \geq 0$ および $\eta(M) \geq 0$ とする。また、 p_1 と p_2 を随伴変数とする。ここで、迎角 α と飛行経路角 γ を制御変数にとり、各々の許容範囲を

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}, \quad \text{および} \quad \gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max}$$

に設定する。ただし、

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \alpha_{min} < 0, \quad 0 < \alpha_{max} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \gamma_{min} < 0, \quad 0 < \gamma_{max} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

とする。最大原理(問題 G の場合は最小原理)[2] を適用すると、最適制御は (5.1) 式の Hamilton 関数を最小にする α^* と γ^* となり、それぞれ、

$$\alpha^* = \begin{cases} 0 & \text{for } p_1 < 0 \\ \max\{|\alpha_{min}|, |\alpha_{max}|\} & \text{for } p_1 > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

および

$$\gamma^* = \begin{cases} \gamma_{min} & \text{for } vp_2 > gp_1 \\ \gamma_{max} & \text{for } vp_2 < gp_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

で与えられる。

ここで、この緩和問題の正準方程式の数値解を得る代わりに、最適制御 α^* と γ^* の候補値のすべての組み合わせ、すなわち、つぎの 4 つの組み合わせ、

$$\{(\alpha, \gamma)\} = \{(0, \gamma_{min}), (0, \gamma_{max}), (\max\{|\alpha_{min}|, |\alpha_{max}|\}, \gamma_{min}), (\max\{|\alpha_{min}|, |\alpha_{max}|\}, \gamma_{max})\}$$

を制御入力集合とし、複合アルゴリズムを用いて数値的に解くことを考える。そのために、先程と同様に、独立変数を時間 t からエネルギー E に変換する。計算は、終端点から後向き（エネルギー高度の減少方向）に、最終区間、すなわち、 N 段から $N-1$ 段までの区間に対し、複合アルゴリズムを適用することによって行う。この計算で得られた解を、修正エネルギー近似解の最終区間の解の補正に用いる。この補正法を以下では MP 法と呼ぶことにする。

一方、この計算を最終区間だけでなく初期段 $k=0$ まで繰り返し適用し、各段で得られた終端点からの最小コストを下界値として用いる場合を、2M 法とする。ただし、2M 法の計算の実行で必要となる初期点から現在点までのコストの下界値は、修正エネルギー近似解より求める。もう一つ、原問題 P に対して最終区間だけ、終端点から後向きに複合アルゴリズムを適用することによって得られる解を用い、修正エネルギー近似解の最終区間を補正する方法を考える。ここでの制御入力、原問題 P での離散化した許容迎角 $\alpha_N \in U(\mathbf{x}_N)$ とする。この方法で求めた、最終区間の最短飛行時間は、実際的な飛行時間の良好な近似を与える。また、容易に求めることができる。この最短飛行時間で修正エネルギー近似解の最終段を補正する方法を、DP 法とする。修正エネルギー近似解を補正なしで用いる場合を、ES 法とする。これらの下界値は、1 度計算すると、再計算を必要としない。また、複合アルゴリズムを終端点から後向きに適用することによって得られる最適制御は、終端点に対しフィードバック構造を持つ。したがって、終端値を変えなければ、初期値のみを変えた問題に対しても、この下界値を使うことができる。

以下では、原問題 P の数値解を求めるとき、それら 4 つの方法で求めた下界値を、それぞれ、複合アルゴリズムの実行で使用したときの性能を調べることにする。

6. 数値例

超音速飛行をする航空機の最短時間上昇問題を考える。ここで用いた航空機の機体の仕様は、Bryson et al.[4] で取り扱われた「airplane 2」と同一である。空力基準面積を $S=46.5\text{m}^2$ 、誘導抗力パラメータを $\eta=1.0$ 、比推力を $I_{sp}=2,800$ 秒としている。airplane 2 に対する揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ と零揚力抗力係数 C_{D0} は、マッハ数の関数（表関数）として表 1 に、また、エンジン推力 T は、高度とマッハ数の表関数として表 2 にそれぞれ示されている。

一方、空気密度 $\rho(h)$ と音速 $a(h)$ は日本工業標準調査会による標準大気表 [12] から計算した。最初の問題例は、境界条件

$$\begin{aligned} h(t_0) &= 12,192\text{m}(40,000\text{ft}), & v(t_0) &= 0.5\text{Mach}, & \gamma(t_0) &= 0 \\ h(t_f) &= 24,384\text{m}(80,000\text{ft}), & v(t_f) &= 2.0\text{Mach}, & \gamma(t_f) &= \text{無指定}. \end{aligned}$$

の下で、初期点から終端点に最短時間で上昇移動するような、航空機の制御入力 α を決定する問題である。最初に、複合アルゴリズムで使用する下界値を求めるため、緩和問題 E に修正エネルギー近似法を適用した。そこでは、初期点と終端点を、それぞれ含む 2 つの等高線の間を 100 分割し、それら離散化した各区間の最小移動時間を求める。そして、それらの最小移動時間の累積値をもって、初期点から終端点までの最短上昇時間とする。本計算では、最短上昇時間は 100 秒であった。計算時間は、20MIPS の速度を持つ計算機で 1 秒以下である。複合アルゴリズムを適用するため、原問題の独立変数 t をエネルギー E に変換しているが、状態空間を、 h, v, γ に関して各 32 ブロックに、 m に関して 1 ブロックに、 E に関し

表1 マッハ数の関数としての揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ と零揚力抗力係数 C_{D0}

Mach No. M	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$C_{L\alpha}$	2.240	2.287	2.325	2.349	2.350	2.328	2.290	2.235	2.160	2.063	1.950
C_{D0}	0.0065	0.0067	0.0055	0.0050	0.0060	0.0090	0.0118	0.0123	0.0110	0.0097	0.0086

Mach No. M	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
$C_{L\alpha}$	1.829	1.700	1.567	1.435	1.318	1.250
C_{D0}	0.0078	0.0074	0.0071	0.0069	0.0067	0.0068

表2 高度とマッハ数の関数としての推力 T

Mach No. M	推力 T ($\times 1,000$ kg)																
	高度 h (km)																
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
0	10.6	9.0	7.4	5.8	4.2	3.0	2.0	1.2	0.7	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	10.4	8.6	7.0	5.5	4.1	3.0	2.0	1.3	0.7	0.5	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0
0.4	10.3	8.6	7.0	5.5	4.3	3.1	2.2	1.5	0.9	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.1	0.0	0.0
0.6	10.6	8.9	7.3	5.9	4.7	3.5	2.5	1.7	1.2	0.8	0.5	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
0.8	11.1	9.6	7.9	6.5	5.3	4.0	2.9	2.1	1.5	1.0	0.7	0.5	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1
1.0	12.2	10.8	8.8	7.3	6.0	4.7	3.6	2.6	1.7	1.2	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1
1.2	13.3	12.0	10.0	8.4	6.9	5.6	4.3	3.1	2.0	1.4	1.2	0.9	0.6	0.4	0.3	0.2	0.2
1.4	13.5	12.7	11.4	9.9	8.1	6.6	5.1	3.8	2.7	1.9	1.4	1.0	0.7	0.5	0.4	0.3	0.2
1.6	13.5	13.1	12.7	11.4	9.6	7.7	6.0	4.6	3.3	2.4	1.7	1.2	0.9	0.6	0.4	0.3	0.2
1.8	13.5	13.2	12.9	12.1	10.9	9.0	7.2	5.3	3.9	2.8	2.0	1.5	1.1	0.7	0.5	0.3	0.3
2.0	13.6	13.3	13.0	12.5	11.8	10.2	8.2	6.1	4.5	3.2	2.2	1.7	1.2	0.8	0.6	0.4	0.2
2.2	13.6	13.3	13.0	12.7	12.2	11.2	9.3	6.8	5.0	3.6	2.5	1.9	1.4	0.9	0.6	0.4	0.2
2.4	13.6	13.2	13.0	12.6	12.2	11.9	10.2	7.5	5.5	4.0	2.9	2.1	1.5	1.0	0.7	0.4	0.2
2.6	13.5	13.1	13.0	12.6	12.2	11.9	10.5	8.2	6.0	4.3	3.1	2.3	1.7	1.1	0.7	0.5	0.2
2.8	13.5	13.1	12.9	12.5	12.1	11.8	10.7	8.8	6.3	4.6	3.3	2.4	1.8	1.2	0.8	0.5	0.2
3.0	13.5	13.1	12.8	12.4	11.9	11.7	10.7	9.1	6.6	4.7	3.5	2.5	1.8	1.3	0.8	0.5	0.2
3.2	13.5	13.0	12.6	12.2	11.8	11.5	10.6	8.9	6.7	4.9	3.5	2.6	1.8	1.2	0.8	0.5	0.2

て12レベルに、分割した。また、 z は、他の状態変数の変化に影響を及ぼさないから、別個に計算することが可能であり、離散化を行わない。一方、制御変数 α を $-2 \sim 10$ deg.の範囲を13レベルに分割した。この離散化は、従来型動的計画法を用いたとき5,000,000回のコスト関数の評価を必要とする。最適解の上界値は、修正エネルギー近似解を参考にして決めるが、より粗い離散化を用いた複合アルゴリズムを数回試行的に適用することで、範囲をかなり絞ることができる。複合アルゴリズムで求めた最短時間上昇経路を、修正エネルギー近似解と共に図5に示す。図中、等エネルギー高度線に添えられた数値と文字KMはエネルギー高度(単位はKm)の値を示す。以下の図においても同様である。複合アルゴリズムを用いたときの最短上昇時間は163秒であり、原問題Pを直接に最急降下法で解いたときの162秒と比べ、0.7%の離散化誤差の範囲で一致した。複合アルゴリズムの計算時間は、修正エネルギー近似法で下界値を計算するときの1秒を含め、約1分であった。図6に、複合アルゴリズムによって計算された状態空間の領域を示す。黒く塗りつぶされた部分が、初期点からの各経路の評価関数値が計算された領域である。鋭く尖った状態では、その状態までの経路が限定操作により最適経路の一部に成り得ないと判定されたために、以後の計算が停止させられる。

次に、境界条件が変わったときの複合アルゴリズムの頑健性を調べるため、境界条件だ

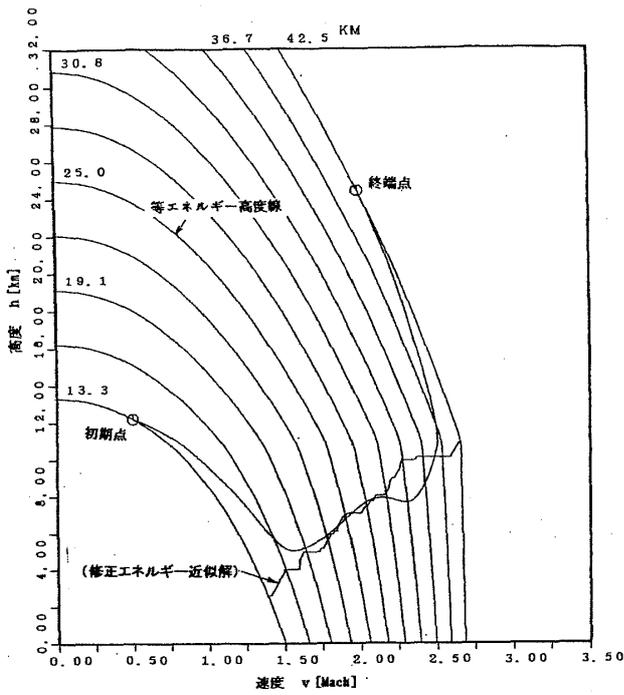


図5 修正エネルギー近似を用いた複合アルゴリズムの最短時間上昇経路

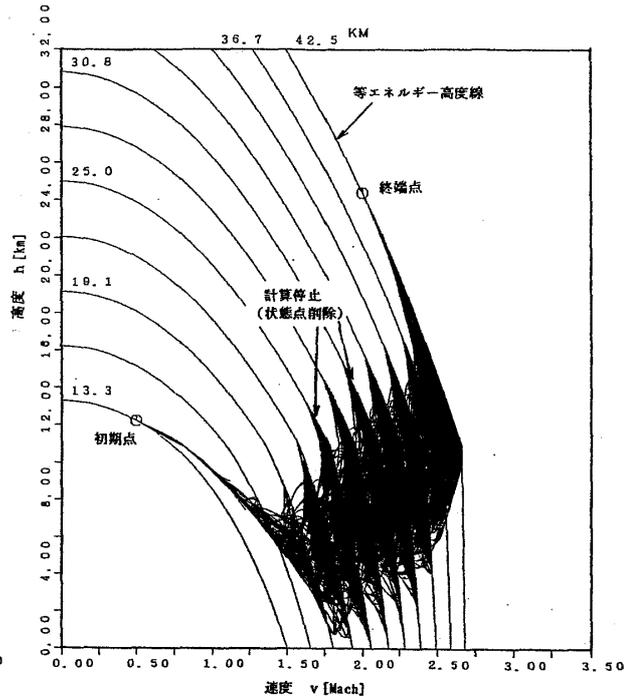


図6 複合アルゴリズムの実行空間

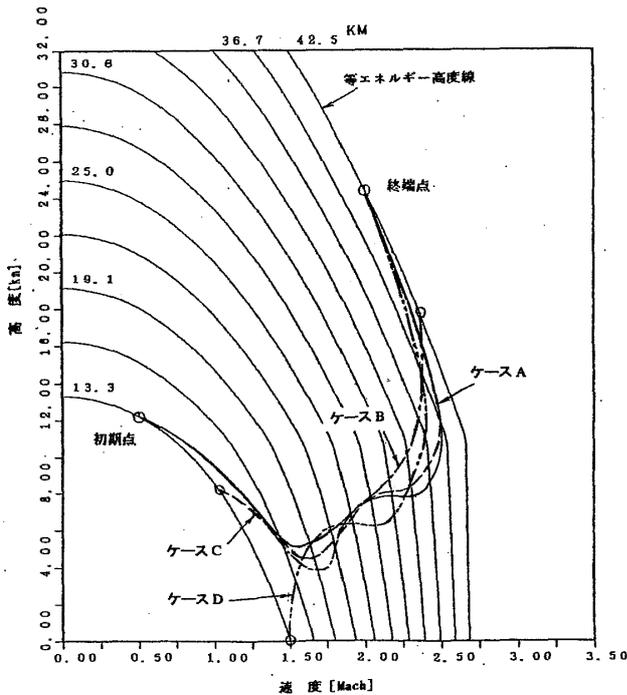


図7 種々の境界条件下での最短時間上昇経路

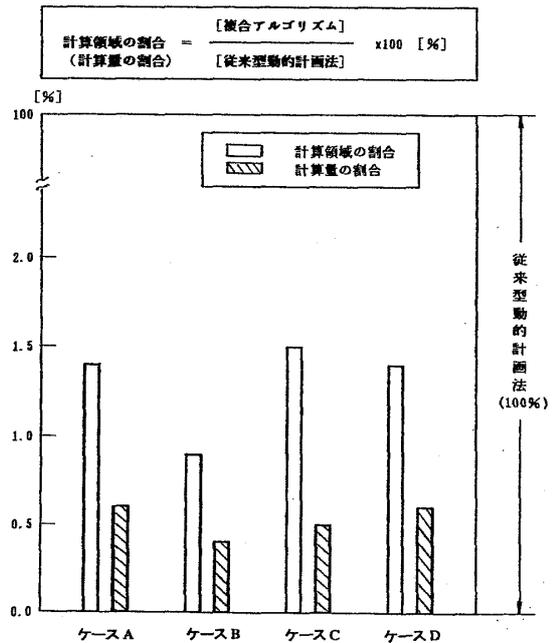


図8 従来型動的計画法に対する複合アルゴリズムの計算量と計算領域の割合

表3 空力パラメータ $C_{L\alpha}$, C_{D0} および T を変化させた6つの例題

例題名	用いたデータ	最短上昇時間
ケース 1	$CL\alpha + 1.0$	162.3 秒
ケース 2	$CL\alpha - 1.0$	187.0
ケース 3	$C_{D0} + 0.01$	334.9
ケース 4	$C_{D0} - 0.01$	106.6
ケース 5	1.5 T	105.2
ケース 6	0.9T	192.7
基準例題	$CL\alpha, C_{D0}, T$	163.1 秒

けを変えた4例について調べた。結果を図7に示す。すべてのケースにおいて、最適経路を複合アルゴリズムにより困難なく求めることができた。この図から、航空機が (h, v) 平面上で初期点から終端点へエネルギー高度を増加するとき、どのケースでもほぼ同じ領域を通過する区域があることがわかる。この区域は時間に対するエネルギー変化率が最大の点であり、初期点や終端点から離れている場所でありながら、そこを通過することで、より一層の時間短縮を図っていると解釈できる。図8では、この4例に対して、複合アルゴリズムの計算に必要な計算量および計算領域を、従来型動的計画法のそれらと比較している。どの境界条件の例でも、複合アルゴリズムを用いると、計算量では従来型動的計画法の0.6%以下、計算領域では1.5%以下に削減できることがわかる。

さらに、複合アルゴリズムにおいて、3種類の下界値強化法を用いたときの効果を、従来型動的計画法との比較において調べた。必要な計算量を図9に示す。各下界値強化法の計算量の削減の割合は、従来型動的計画法を用いた場合の0.2~0.5%である。また、どの例題に対しても、計算量削減の大きい順に2M法, DP法, MP法となっている。一方、各手法の計算領域の削減の割合は、従来型動的計画法を用いた場合の0.4~1.2%であり、その削減の大きい順に2M法, DP法, MP法となっている。この順位は、計算量での順位とまったく同一である。ES法は比較のために示した。計算量と計算領域の指標で見ると、2M法は最も効率がよいが、下界値を計算する手間、計算の簡易性なども含め、総合的に判断すると、計算量と計算領域が、それぞれ0.5%と1.2%のMP法が最も望ましいと思える。

次に、航空機の最短時間上昇経路は揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ 、零揚力抗力係数 C_{D0} 、あるいはエンジン推力 T のわずかな変動に対しても大きく変化するため、それらの主要パラメータを前もって変動させた場合に対する複合アルゴリズムの頑健性を調べた。表1と表2の表関数で与えたパラメータ値 $C_{L\alpha}$ 、 C_{D0} 、 T を用いた数値例を基準例題とし、それらの各パラメータ値からの変動量とそれに対応する数値例番号(例題名)を表3に示す。この基準例題のパラメータ値に関し、揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ のみを1.0増加(ケース1)および減少(ケース2)させた場合の複合アルゴリズムによる最短時間上昇経路を図10に、零揚力抗力係数 C_{D0} のみを0.01だけ増加(ケース3)および減少(ケース4)させた場合を図11に、推力 T のみを50%増加(ケース5)および10%減少(ケース6)させた場合を図12に、それぞれ示す。また、表3に各数値例に対する最短上昇時間を併記した。これらすべての数値例に対し、困難なく最適経路を求めることができた。このことは、複合アルゴリズムを用いると、航空機の空力特性やエンジン性能の検討に対して、主要パラメータの変動に対する最適経路への影響

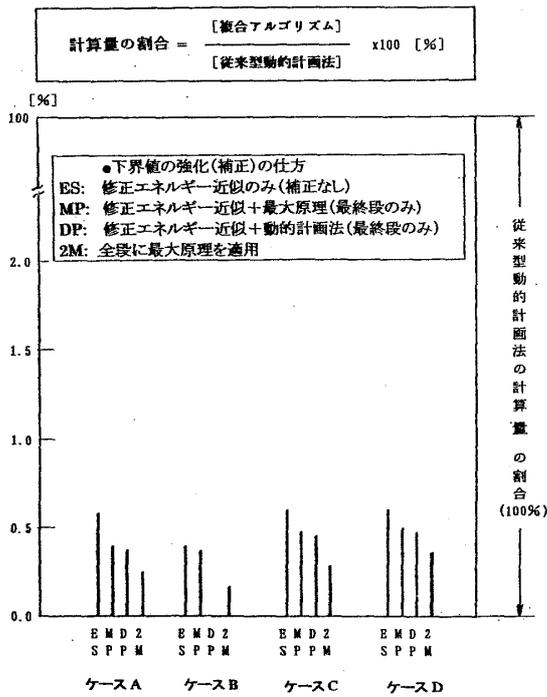


図9 下界値強化の下での複合アルゴリズムの計算量の割合

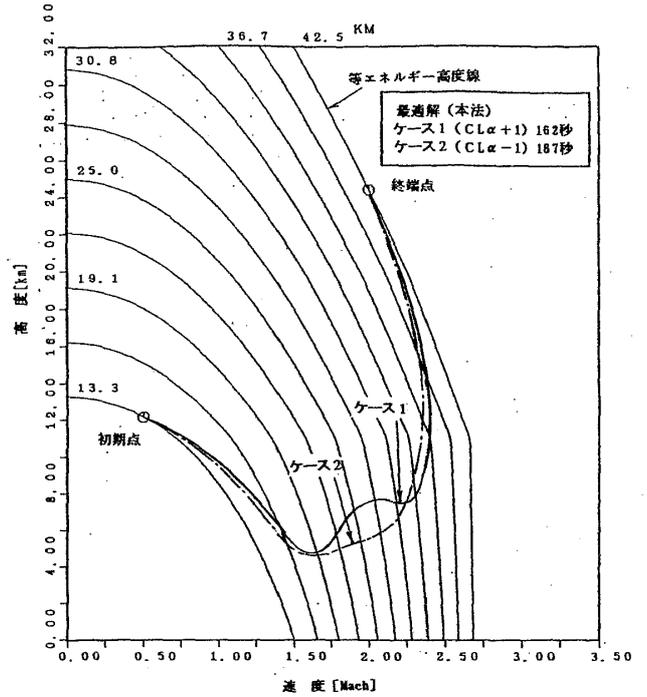


図10 揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ の増減下での最短時間上昇経路

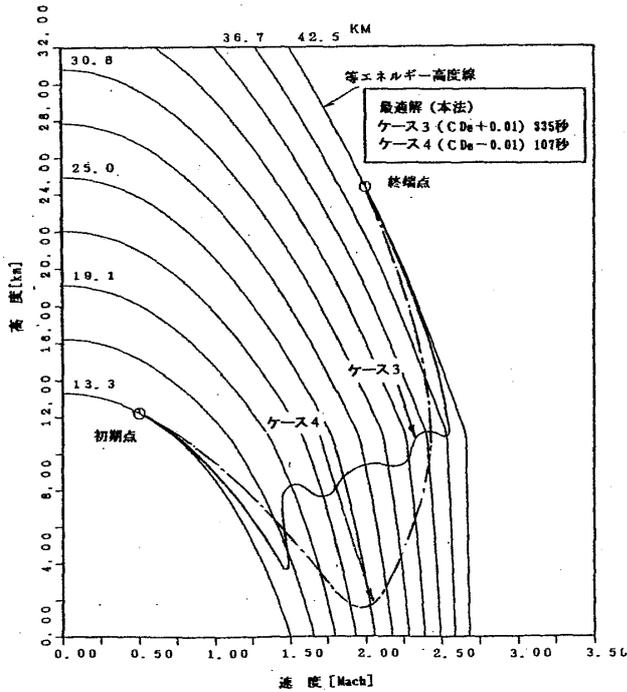


図11 零揚力抗力係数 C_{D0} の増減下での最短時間上昇経路

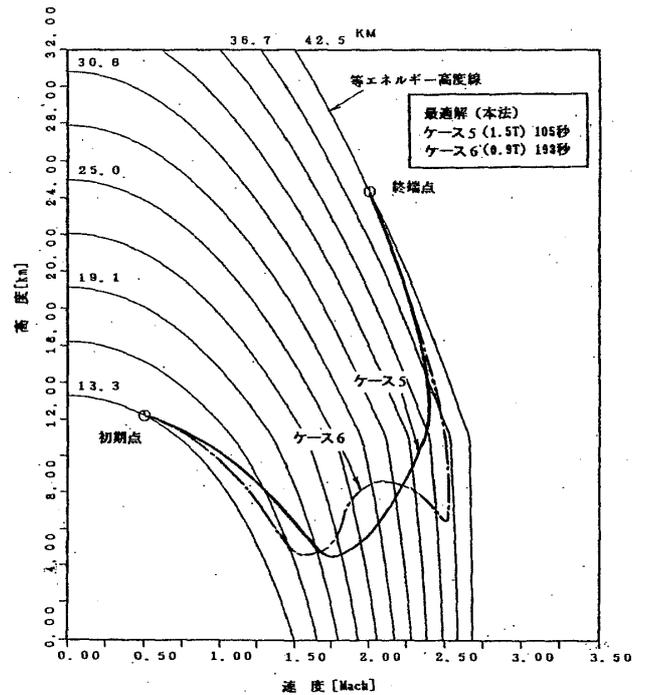


図12 推力 T の増減下での最短時間上昇経路

の度合い（感度）を網羅的に調べることが可能であることを意味する。

一方、本論文で提案するアルゴリズムにも欠点がある。本アルゴリズムではエネルギー近似法によって下界値を計算しているため、本アルゴリズムで扱うことができる航空機は、運動エネルギーと位置エネルギーが相互に交換でき、かつ、エネルギー損失が小さいことを仮定できるシステムに限られる。別な下界値計算を複合アルゴリズムに取り入れることで、そのような欠点を取り除くことを、現在検討している。

7. 結語

動的計画法と分枝限定法を併用した複合アルゴリズムを用いて、超音速航空機の最適制御問題を最短経路問題に帰着させることにより、最適解を効率よく求める方法を提案した。このアルゴリズムは、動的計画法の数多くの長所を継承し、かつ、従来の動的計画法に比べ、計算量と計算領域を大幅に削減することができるため、超音速航空機などの状態変数の次元数の大きな複雑な最適制御問題（たとえば、最短時間上昇問題や最小燃料消費問題）の数値解を、数値計算上、安定的に計算することができる。本法の実行で必要となる下界値は、従来のエネルギー近似法を下界値の条件を満たすように一部修正した、修正エネルギー近似法によって求めた。この修正エネルギー近似法を用いると、原問題の良好な下界値を簡単な計算によって求めることができる。また、本論文では、終端点付近の下界値を強化するいくつかの方法を提案し、これらの補正が効果的であることを示した。

数値実験として、超音速航空機の最短時間上昇問題に本法を適用した結果、境界条件を様々に変化させた問題に対し、複合アルゴリズムの計算量を従来型動的計画法の0.6%以下に、また、計算領域を1.5%以下に減少させることができた。これらを含む多くの計算結果から、本論文で提案した複合アルゴリズムは、超音速航空機の最適制御問題の解を技巧を用いずに計算することができ、かつ頑健性に優れていることが判明した。

一方、本論文で提案するアルゴリズムにも欠点がある。修正エネルギー近似法を下界値として用いたため、本アルゴリズムで扱うことのできる飛行体は、運動エネルギーと位置エネルギーが相互に交換でき、かつ、エネルギー損失が小さいことを仮定できるシステムに限られる。別な下界値計算を複合アルゴリズムに取り入れることで、そのような欠点を取り除くことが、今後残された課題である。

最後に、ご指導と有益な助言を与えてくださった筑波大学大学院企業科学専攻の鈴木久敏教授に謝意を表します。

参考文献

- [1] M.D. Ardema: Solution of The Minimum Time-to-Climb Problem by Matched Asymptotic Expansions. *AIAA Journal*, **14** (1976), 843-850.
- [2] M. Athans and P.L. Falb: *Optimal Control*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [3] R.E. Bellman: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
- [4] A.E. Bryson Jr, M.N. Desai and W.C. Hoffman: Energy-State Approximation in Performance Optimization of Supersonic Aircraft. *Journal of Aircraft*, **6** (1969), 481-488.
- [5] A.E. Bryson and W.F. Denham: A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems. *Journal of Applied Mechanics*, **29** (1962), 247-257.

- [6] A.J. Calise: Singular Perturbation Methods for Variational Problems in Aircraft Flight. *IEEE trans.*, AC-**21** (1976), 345-353.
- [7] S. Gonzales and S. Rodriguez: Modified Quasilinearization Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions. *J. Optim. Theory Appl.*, **50** (1986), 109-128.
- [8] H.J. Kelley: Flight Path Optimization with Multiple Time Scales. *Journal of Aircraft*, **8** (1975), 864-866.
- [9] T.L. Morin and R.E. Marsten: Branch-and-Bound Strategies for Dynamic Programming. *Operations Research*, **24** (1976), 611-627.
- [10] J.E. Rader and D.G. Hull: Computation of Optimal Aircraft Trajectories Using Parameter Optimization Method. *Journal of Aircraft*, **12** (1975), 864-866.
- [11] E.S. Rutowski: Energy Approach to the General Aircraft Performance Problem. *Journal of the Aeronautical Sciences*, **21** (1954), 187-195.
- [12] 日本工業標準調査会: JIS W-0201, 日本規格協会, 1990.

花岡照明

〒 113-8656 東京都文京区本郷7丁目3番1号
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻
E-mail: hanaoka@space.t.u-tokyo.ac.jp

ABSTRACT

**A LOWER BOUND COMPUTATION METHOD USING
ENERGY-STATE APPROXIMATION AND ITS APPLICATION TO
SUPERSONIC AIRCRAFT SHORTEST PATH PROBLEMS**

Teruaki Hanaoka
The University of Tokyo

In this paper, a lower bound computation method using energy-state approximation is proposed and applied to supersonic aircraft shortest path problems. The proposed algorithm is basically based on the forward dynamic programming combined with the branch-and-bound technique. This hybrid algorithm can reduce computational requirements and computer memory requirements of the conventional dynamic programming substantially by incorporating the bounding operation of the branch-and-bound into the computing process of the forward dynamic programming. The lower bound of the optimal solution which becomes necessary in execution of the hybrid algorithm is computed by the modified energy-state approximation which can be obtained by modifying partially the conventional energy-state approximation in order to satisfy the lower bound condition. This computation to obtain the lower bound solution is very simple without any difficulties. Also, in this paper, we propose some methods of lower bound reinforcement to obtain a more reduction of computation requirements in the hybrid algorithm.

The proposed hybrid algorithm is composed as the acceding to a lot of advantages of dynamic programming and the application to complicated nonlinear systems is easy. At numerical examples to the minimum-time-to-climb problems of the supersonic aircraft, a typical solution obtained by the hybrid algorithm is equivalent to that of the steepest descent method within quantization errors of 0.7%. The number of computation requirements of the hybrid algorithm which is required to obtain optimal solutions is equal to or less than 1.4% at the ratio with the number of computation requirements in the conventional dynamic programming. The computing time is about 60 seconds on a computer with speed of 20 MIPS including 1 second of the computation of the lower bound. Also, when applying this method to the problems to have changed the boundary conditions of the original problem variously to examine the robustness of the hybrid algorithm, the number of computational requirements of the hybrid algorithm was equal to or less than 2% of that to any problems. On the other hand, when using a strengthened lower bound, this number was equal to or less than 1%.

Also, we applied the hybrid algorithm to the supersonic aircraft to have changed aerodynamical data variously in order to examine the influence of the change of the aerodynamical data of the supersonic aircraft comprehensively. As a result, that the optimal pass under various conditions could be generated unifyingly without needing skill when using this method was confirmed.