直列型待ち行列モデルの近似解析

宋　宇（東北大学大学院経済研究科）　指導教官　高橋幸雄教授

1. はじめに

ブロッキングのある直列型待ち行列では，定常確率をはじめとする各種の特性量を計算することは非常に困難であるため，さまざまな近似法が考案されているが，まだ決め手となるようなものはない．特に，近似値に含まれる誤差について事前的にも，また事後的にでも，評価できるものがほとんどないことが問題である．この論文は，誤差の程度について事後的にある程度の感触をつかむことができる一連の近似モデルを系統的に導く方法を提案するものである．

2. 従来の研究の概要

[TAKA85] では，通信型ブロッキングをもつ直列型待ち行列モデルに対して，新しい AGGREGATION METHOD(CROSS AGGREGATION METHOD) が提案された．この方法は，近似レベルの選択の柔軟性を利用して，複数の異なったレベルの近似値を導くことによって，近似値に含まれる誤差の程度を推測することを可能にしたものである．たとえば，1つのノードだけの状態変化に注目するときは，隣接のノードとの間に独立性を仮定する(近似レベル1)．また，互いに隣接する2つのノードの状態を同時に考慮するときは，隣接していないノードとの間の独立性を仮定する(近似レベル2)．その結果，もし各レベルの近似値の間にそれほど差がなければ，厳密解に近い近似解が得られたと判断することも可能となる．

この方法ではノード間の独立性を仮定するため，状態空間が直積になること，および状態変化が多くのノードの状態の変化を伴わないことが望ましい．したがって，この方法を生産型ブロッキングをもつ直列型待ち行列モデルに直接応用することは難しい（これについては SCHWEITZER & ALTIOK [SCHW87] が行なっているが，成功しているとは言えがたい）．この論文では状態の記述法を工法し，マルコフチェーンの変形を行なって，CROSS AGGREGATION METHOD を生産型ブロッキングをもつ直列型待ち行列モデルへ適用することを試みる．

3. 近似法

4段直列型待ち行列の例

例として，次のような4段直列型待ち行列システムを考える．各ノードは指数窓口を2つずつもっており，最大ノード内人数は4人である．ノード j ($j=1,2,3,4$) の窓口のサービス率は μ_j であり，到着は平均 λ のポアソン過程である．1段目が一杯になっているとき到着する客は呼損となる．次のノードが一杯になったときは生産型のブロッキングが適用されるものとする．適当に状態をとることによって，このモデルはマルコフチェーンとして表現することが可能である．

状態の新記述法

従来の記述法は，各段の系内人数とブロックされた窓口の数の組を状態表現とするものである．たとえば，1段目と4段目にそれぞれ3人，2段目と3段目にそれぞれ4人いて，1，2段目の窓口が1つずつブロックされているという状態は，(3, 1, 4, 1, 4, 0, 3) で表わされる．しかし，3段目のサービスが終了すると，状態が (2, 0, 4, 0, 4, 0, 4) となり，7つの要素のうち4つも変化してしまう．このように，玉つき状にディブロッキングが起こり，各段の独立性を仮定しにくい．

新記述法では，ノード j の客がブロックされた場合，ブロックされた窓口は，ノード $j+1$ の待合室になると考え，その窓口にいる客はノード $j+1$ の系内人数に勘定される．したがって，上の例の状態は (2, 4, 5, 3) となり，3段目のサービスが終了したとき，(2, 4, 4, 4) と，3つ目と4つ目の要素のみが変化する．

表 1

ケース 1		λ=6, μ_1=3, μ_2=3, μ_3=3, μ_4=3							
		呼損確率	ブロッキング確率 NODE2	NODE3	NODE4	平均行列長 NODE1	NODE2	NODE3	NODE4
解	真	.2932	.3844	.3272	.2300	2.5524	2.5977	2.3915	2.0230
	レベル1	.3069	.3963	.3213	.2333	2.5317	2.6172	2.3743	2.0200
	レベル2	.2989	.3859	.3311	.2314	2.5563	2.6021	2.3971	2.0223
誤差%	レベル1	4.68	3.10	−1.82	1.46	−0.81	0.75	−0.72	−0.15
	レベル2	1.93	0.40	1.18	0.60	0.15	0.17	0.24	−0.04

(注：誤差＝(近似値一真の値)／真の値)

マルコフチェーンの変形

新記述法では，各ノードのとり得る状態は互いに関連があり，状態空間が直積とはならない．各段状態の独立性を仮定していくためには，これは不都合である．そこで，対応する実在状態がない組合せをダミー状態として復活させ，状態空間が直積空間となるようにマルコフチェーンを変形することを考える．ダミー状態はもとの状態空間の境界点から派生するものと考え．一定の手順にしたがい，その帰属（親）を決める．そしてダミーに関する推移確率をうまく決めることによって，ダミーの定常確率をその親の定常確率に加算すれば，もとのマルコフチェーンの定常確率が復元されるよう変形する．

このように変形したマルコフチェーンでは，状態空間が直積となり，近似の際に AGGREGATE する状態数も同じで，しかも境界点の異常に高い定常確率がダミーに分散され，各段の独立性の仮定が比較的自然に行なえる．

近似法

近似レベル1では，1つのノードだけの状態変化に注目し，隣接ノードとの間の独立性を仮定する．この仮定を用い，各段ごとに，その段の状態だけに着目して，AGGREGATION を行ない，各段の状態確率を変数とする連立方程式を解くことによって，近似解を求める．近似レベル2では，互いに隣接する2つのノードの状態を同時に考慮して AGGREGATE する．すなわち，隣接していないノードの間の独立性を仮定して，隣接した2つノードの同時確率を変数とする連立方程式を導き，それを解いて近似値を求める．

こうして得られた2つのレベルの近似値を比較する．もしそれほど差がなければ，厳密解に近い近似解が得られたと判断することができる．もしそうでなければ，さらに独立性の仮定をゆるめ，近似レベルを高めればよい．

数値例とその考察

表1は上記のモデルに対して，この方法で得られた近似解の例である．この例では，レベル1とレベル2の近似値の差がそれほど大きくないため，比較的よい近似値が得られたと判断することができる．事実，この例では近似解がかなり精度の高いものである．

この他にもいくつかのパラメータに対して計算を行なったが，ほとんどのケースでレベル1とレベル2の近似値の差は小さく，実際，真の値とも近かった．ただし，中には2つの近似値の差が大きかったり，また差は小さくとも真の値と離れているものもある．それらをどう扱うかは今後の課題である．

参考文献

SCHW87 SCHWEITZER, P. J . & ALTIOK, T. "Aggregate Modelling of Tandem Queues with Blocking", in Proceedings of 2nd International Workshop on Applied Mathematics and Performance/Reliability Models of Computer/Communication Systems, G. IAZEOLLA, P. J. COURTOIS & O. J. BOXMA (Eds.), North Holland(1987)

TAKA85 TAKAHASHI, YUKIO "A New Type Aggregation Method for Large Markov Chains and its Application to Queueing Networks", in Proceedings of ITC 11 (Kyoto, Japan, Sept. 1985) MINORU AKIYAMA, Ed., Elsevier (North Holland), IAC 1985, pp. 3, 4 A. 1. 1-4