証券投資技法の基礎と概要 (3)

――ポートフォリオ分析と株式投資分析の基礎(その2)――

石井　吉文

1. CAPMとAPT

前回は株式投資理論の基礎としてCAPM (Capital Asset Pricing Mode) を取り上げた．それは，いわゆる株式の各銘柄のもつリスクを市場全体のもつリスクで表わされるものと，それでは表わすことのできない個々銘柄が独自にもつ個別リスクによって線形的に描写するものであった．

$p_i-r=\beta_i(p_m-r)+\alpha_i+\varepsilon_i$

p_i：株式銘柄 i の収益率

p_m：マーケットの収益率

r：無リスク利子率

β_i：銘柄 i のベータ値

α_i：銘柄 i のアルファー値

ε_i：銘柄 i の価格変動誤差項

米国では，1970年代になると，株式投資におけるリスク尺度として，それまで一般的であった収益率の分散に代わって，このベータ値とその他誤差項で表わすこの理論がとって代わるようになり，いわゆる「ベータ革命」として多くの投資分析家の間で取り上げられるようになった．しかしながらその後，ほぼ時を同じくして，この理論に対する疑問も提起されるようになった．それは主に，多くの実証分析の結果，株式価格の変動を単にベータだけで表わすことが困難であるといった結論が導き出されたためである．また日本の株価市場を対象とした分析においても，米国株式市場同様，CAPMの信頼性を否定する結果が多くなされてきた．

（注） CAPMに対する問題提起としてはまず米国でFama-Macbeth(1973), Black, Jensen-Scholes 等が，また日本の株式市場においては丸・蠟山(1974)，紺谷(1978)，青山(1979)，榊原(1983)等がある．

このように，CAPMの信頼性については実証分析からは良い裏づけが得られず，むしろその問題点が多く指摘されるのみになっているのが現状である．

そこで，CAPMが実証分析の立場からむしろ棄却されることとなったことにより，株価変動をより実証的に説明することができる新たなモデルが考えられるようになった．

i）その1つはCAPMに新たにマクロ変数を組み込んだものである．

$p_i-r=\alpha_i+\beta_i(p_m-r)+b_{i1}\delta_1+b_{i2}\delta_2\cdots+\varepsilon_i$

p_i：株式銘柄 i の収益率

r：無リスク利子率

β_i：銘柄 i のベータ値

α_i：銘柄 i のアルファー値

b_{ij}：銘柄 i の価格変動率の共通因子 j の変動率に対する感応度

$(b_{ij}=\mathrm{cov}(\eta_i,\delta_j)/\mathrm{var}(\delta_j))$

δ_j：共通因子 j の変動率（確率変数）

ε_i：銘柄 i の価格変動誤差項

このアプローチは，CAPMにおけるベータの説明力を有効なものとして認識しつつ，むしろCAPMで問題点となっている実証分析における説明力不足を補おうとするものである．当然のことながら，このモデルによって実証面での適応性は増すものとなった．しかしながらこのモデルにおいても，市場の期待収益率の計測等の面で難点があるといった，CAPMが本来的にかかえる問題点がなんら解決されるものではなかった．

ii）ところで，もう1つのアプローチは，市場収益率とは無関係に，複数の変数（因子）によって銘柄ごとの収益率を記述しようとするものである．

$p_i=\alpha_i+b_{i1}\delta_1+b_{i2}\delta_2+b_{i3}\delta_3\cdots+\varepsilon_i$

p_i：株式銘柄 i の収益率

α_i：定数項

b_{ij}：銘柄 i の価格変動率の共通因子 j の変動率に対する感応度

δ_j：共通因子 j の変動率（確率変数）

ε_i：銘柄 i の価格変動誤差項

いしい　よしふみ　㈱ニッセイ基礎研究所
〒100 千代田区有楽町1－1－1日比谷ビル

このアプローチは，CAPMに比較して実証面での信頼性をもつものであり，CAPMにおける問題点は存在しない．そこで，最近多くの分析家によってこの方法を用いた株式収益率モデルの研究がなされるようになった．このアプローチがAPT (Arbitrage Pricing Theory) の基礎となるものである．

2. APTの基礎

なお，ここであらためてAPTの概要を説明しておくこととしたい．

(1) ファクターモデル

株式の種々の銘柄の価格変動をみると，それらはまったく独立なものではなく，そこになんらかの，株価変動を引き起こす共通した要素が含まれている．たとえばインフレ期待に対して，個々銘柄がそれぞれなんらかの影響を受けるような場合，そのインフレ期待は個々銘柄の株価変動の共通因子とみなされる．なおその共通因子から受ける影響度は銘柄によってさまざまであろう．

・1因子（ファクター）モデル

その共通因子（確率変数）として1つだけを取り上げたものが1因子（シングルファクター）モデルである．なお，その因子として市場全体の変動を取り上げたものがCAPMであった．一般に1因子モデルは次のように記述される．

$$p_i=a_i+b_i\,(\delta-E_F)+\varepsilon$$
$$=\alpha_i+b_i\,\delta+\varepsilon$$

p_i：株式銘柄 i の収益率

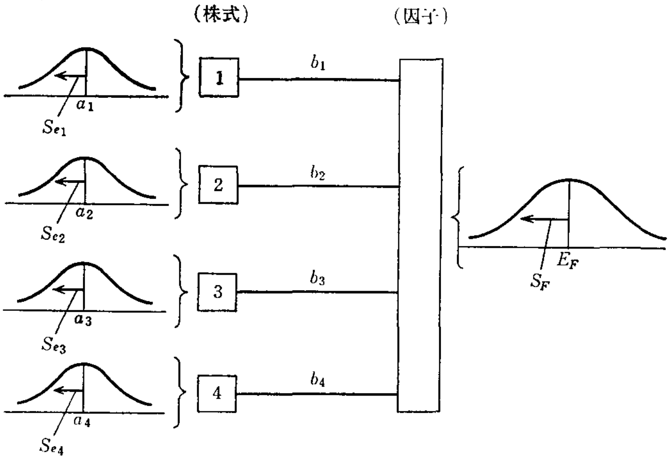

図 1　1因子モデル

a_i，α_i：定数項

E_F：共通因子の平均変動率

b_i：銘柄 i の価格変動率の共通因子の変動率に対する感応度

δ：共通因子の変動率（確率変数）

ε：誤差項

これらを視覚的に示すと図1のように表わされる．

なお，図の左側に並んだ4つの分布は，4つの株式の収益率分布を表わしたものである．また右側に表わしたものは4つの株式それぞれに共通する因子の変動率分布である．この図では共通因子の確率変動に対して，各株式がそれぞれ係数 b_1，b_2, b_3，b_4 に比例した変動をすることを表わしている．

・多因子（ファクター）モデル

各銘柄における共通因子を市場全体の変動（変数）ではなく，経済諸要素の変動（変数）で表わされるような共通因子でみるならば，その因子は単に1つだけでなく複数のものが考えられる．よって以上の議論を数式で表わすと銘柄 i の収益率 p_i は

$$p_i=\alpha_i+b_{i1}\delta_1+\cdots+b_{iK}\delta_K$$
$$+\varepsilon_i\cdots☆$$
$$(i=1,2,3,\cdots,n)$$

となる．

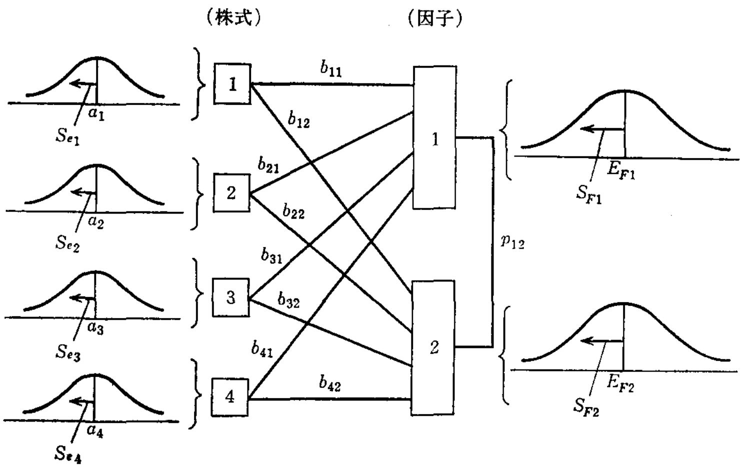

図 2　2因子モデル

上式中，α_iは証券 i の期待収益率である．δ_Kは株式各銘柄の k 番目の共通因子（確率変数）であり，その期待値はゼロである．さらに b_{ik} は k 番目の共通因子δ_kの変動に対する銘柄 i の価格感応度（$b_{ik}=\mathrm{cov}(\eta_i,$

$\delta_k)/\mathrm{var}(\delta_k))$ を表わす．最後の ε_i は共通変動要素に無関係な株式 i に固有の価格変動誤差項を表わす．

以上を視覚的に示すと，たとえば図2のように表わされる．

なお，ここで表わした図は，共通因子を2つとおいて，先の1因子モデルの場合と同様に，各銘柄の収益分布とそれらの共通因子の変動分布との関係を視覚的に示したものである．

APTは株価の変動を以上の多因子モデルで表わすものであり，また，CAPMで用いられるような市場全体の価格変動は考慮しない（市場全体の価格変動も個々の銘柄と同様に，これら複数の共通因子によって表現されるべきものであるという立場である）．なお，ここで記述される複数の変動因子（確率変数）は，市場にある各銘柄に共通するものであり，またそれぞれの変動は互いに独立であることを要する．なぜなら，たとえば選択された2つの変動因子の間になんらかの相関があるならば，一方は他方の因子によって説明がなされるわけであるから，株式の価格変動を説明するにさいし，そのどちらか一方の変数は必要としないからである．

つまり，因子 δ_i と δ_j においてそれらが独立でなければ，一方の因子 δ_j は

$\delta_j=a\delta_i+b\delta_0$

a，b：定数

δ_0：$E(\delta_i|\delta_0)=0$ となる変動因子．というように，他方の因子 δ_i とそれと直角の座標軸をもつ因子 δ_0 によって表わされるからである．

また，もしここで先の☆式の誤差項 ε_i を無視できるのであれば，☆式より，株式銘柄 i の価格変動は，無リスクの期待収益率と，k 個のリスクのベクトル δ_1，δ_2，δ_3，…，δ_k との $k+1$ 個の項に数値を代入することによって決定されることとなる．

以上，APTの概要を簡単に説明したわけであるが，このAPTによって株価変動を説明する理論モデルを実際に構築する場合，まず，その説明変動因子の数，およびそれらが互いに独立であるかどうかの検証を必要とする．一般には株式の変動因子としてはその数は実証的に，4から7個とされているわけであるが，それらは分析の内容（銘柄サンプリング，あるいは計測期間等）によって異なる．しかし，それらはAPTが実証分析によってなされるものであることからするなら，むしろ当然のこととされよう．また，このことは，APTにおいても未だ完全に各株式の価格変動を記述できるものではないことを示すものである．

(2) APTとその仮定条件

以上は，個別銘柄についての議論をしてきたわけであるが，ここでそれらを組み合せて構成されるポートフォリオの収益率について考えていきたい．なお銘柄 i の投資金額を x_i とするポートフォリオの収益率 $\boldsymbol{p}_0$ は $\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{p}_0=\sum x_i\cdot p_i$

$=(\sum x_i\alpha_i)+(\sum x_i b_{i1})\delta_1+\cdots+(\sum x_i b_{ik})\delta_k+\sum x_i\varepsilon_i$

$\equiv\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{a}_0+(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{b}_1)\delta_1+\cdots+(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{b}_k)\delta_k+\boldsymbol{x}_0\cdot\varepsilon$

$\boldsymbol{x}_0$：ポートフォリオの投資金額

x_i：株式銘柄 i の投資金額　$(x_0=\sum x_i)$

$\boldsymbol{p}_0$：ポートフォリオの収益率

p_i：株式銘柄 i の収益率

$\boldsymbol{a}_0$，α_i：定数項

b_{ij}：銘柄 i の価格変動率の共通因子 j の変動率に対する感応度

$(b_{ij}=\mathrm{cov}(\eta_i,\ \delta_j)/\mathrm{var}(\delta_j))$

$\boldsymbol{b}_j$：ポートフォリオの変動率の共通因子 j の変動率に対する感応度

δ_j：共通因子 j の変動率

ε_i：銘柄 i の価格変動誤差項

なお，ここで議論の単純化のため，各銘柄の誤差項 ε_i の分散が等しく σ^2 で表わされ，また各銘柄の投資額も等しい $(x_i=x_0/n)$ とするなら，このポートフォリオの誤差項の分散は

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{x}_0\cdot\varepsilon)=\mathrm{Var}(\sum x_i\varepsilon_i)=\mathrm{Var}(x_0/n\cdot\sum\varepsilon_i)$$
$$=x_0^2/n\cdot\mathrm{Var}(\varepsilon_i)=x_0^2\cdot\sigma^2/n$$

と表わされ，銘柄数が多いほどこの値はゼロに近づく．

よってポートフォリオの収益率は

$\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{p}_0=(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{a}_0)+(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{b}_1)\delta_1+\cdots+(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{b}_k)\delta_k$

となる．

さらにここでポートフォリオの収益の期待値を求めるならば，$E(\delta_i)=0\ (i=1,2,3,\cdots)$ であるから，

$E(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{p}_0)=\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{a}_0$

と表わされる．

次に，ポートフォリオの投資金額の合計が $\sum x_i=x_0=0$（もともと投資資金がなく，すべて借入れと空売りによっているとする）である場合を考えてみよう．

ここでもし，$\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{p}_0>0$ であるとするなら，資金をもたずに収益をあげることができるということであるから，どの投資家もこの組合せによるポートフォリオ（空売りを含む）を考えるであろう．しかしながら市場全体

で見た場合，買い手が存在するためには売り手の存在が必要である．市場参加者のすべてが買い手あるいは売り手の一方に偏るような場合，市場は明らかに機能しない．そのため，こういったポートフォリオを組もうとする投資家の収益はゼロに収束しよう．

このようにＡＰＴは，市場が均衡状態にあるときの収益率とリスクの関係（各銘柄，および，ポートフォリオの収益率は確率変数（因子）の１次式で表わされる）を表わすものであることを断っておかなければならない．つまりＡＰＴは，証券の収益率がファクターモデルに従うときの市場均衡を表わすモデルである．ＡＰＴは収益率がファクターモデルにしたがって生じることに加えて，かつファクターに対する感応度が証券ごとに充分異なるものであることを仮定するものである．

(3) 実証分析の方法

ＡＰＴのファクターモデルは実証分析のうえで成り立つものであることはすでに述べたわけであるが，それはロール－ロス以降おおむね以下のプロセスにしたがって作成されている．

i）株式投資収益率測定を30グループずつに分けて行なう．

ii）最尤推定法にもとづく株式収益率の分散・共分散行列の因子分解

iii）χ^2 検定による最良因子数の決定

（注） 因子分析の基本方程式

ファクターモデル

$p_i=\alpha_i+b_{i1}\delta_1+\cdots+b_{ik}\delta_k+\varepsilon_i$

$(i=1,2,3,\cdots,n)$ を

$P-A=B\delta+\varepsilon$

$$P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

$$\delta=\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

で表わすならば，$B\delta+\varepsilon$ の分散・共分散行列Σは

$$\begin{aligned}\Sigma&=E\{(B\delta+\varepsilon)(B\delta+\varepsilon)'\}\\&=E\{(B\delta\delta'B')+E(\varepsilon\delta'B')+E(B\delta\varepsilon')+E(\varepsilon\varepsilon')\\&=BIB'+0+0+\phi\\&=BB'+\phi\end{aligned}$$

となる．なおここで

$\delta\delta'=I$

とおいた．以上が因子分析の基本方程式である．なお，実際の解法については参考文献にゆずりたい．

参 考 文 献

• Roll. R and S. Ross. "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory." *Journal of Finance 35* (1980), 1073–1103.

• Chen. N,"Some Empirical Tests of the Theory of Arbitrage Pricing" *The Journal Finance* 38 (1983), 1393–1414.

• Black. F. "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing." *Journal of Business* 45 (1972), 444–54.

• ——Jensen, M. and M. Scholes. "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Results." In Michael C. Jensen(ed.), *Studies in the Theory of Capital Market*. New York: Praeger, 1972, 79–121.

• Ross, S. "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing." *Journal of Economic Theory* 13 (1976), 341–60.

• Shanken, J. "The Arbitrage Pricing Theory: Is It Testable." *Journal of Finance* 37 (1982), 1129–40.

• Brown, S. J. and Weinstein, M. I., "A New Approach to Testing Asset Pricing Models: The Bilinear Paradigm," *Journal of Finance*, 38・3, 1983, pp.711–743.

• Chamberlain, G. "Funds, Factors and Diversification in Arbitrage Pricing Models." *Econometrica*, 51・5, 1983, pp.1305–1323.

• Chen, N. F., Roll. R. and Ross, S. A., "Economic Forces and the Stock Market," *Journal of Business*, 59・3, 1986, pp.383–403.

• Cho, D. C., "On Testing the Arbitrage Pricing Theory: Inter Battery Factor Analysis," *Journal of Finance*. 39・5, 1984, pp.1485–1502.

——, Elton, E. J. and Gruber, M. J., "On the

Robustness of the Roll and Ross Arbitrage Pricing Theory," *Joumal of Financial and Quantitative Analysis*, 19・1, 1984, pp.1-28.

- Dhrymes, P.J., Friend, I. and Gultekin, N.B., "A Critical Re-examination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Finance*, 39・2, 1984, pp.323-346.

——, Friend, I., Gultekin, M.N. and Gultekin, N. B., "New Tests of the APT and their Implication," *Journal of Finance*. 40・3, 1985, pp.659-674.

- Huberman, G., "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Economic Theory*, 28, 1982, pp.183-191.
- Joreskog, K. G., "Some Contributions to Maximum Likelihood Factor Analysis," *Psychometrika*, 32, 1967, pp.443-482.

——, "Factor Analysis by Least-squares and Maximum Likelihood Methods," in Enstein K. et al., eds., *Statistical Methods for Digital Computers*, New York: John Wiley & Sons. 1977, pp.125-153.

- Fama, E. F. and Macbeth, J.D., "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, 71, 1973, pp.607-636.
- 青山 護,「リスクの再評価について一わが国株式市場における実証研究一」,「経済学研究」, 東京大学, 22, 1979年, pp.44-52

——,「不確実性と選好」, 諸井勝之助・若杉敬明編「現代経営財務論」, 1984年, pp.21-41

- 丸淳子・蠟山昌一,「株式市場における収益と危険」,「計測室テクニカル・ペーパー」, 日本証券経済研究所 No. 29, 1974年, pp.1-43
- 小林孝雄,「市場の均衡と証券価格」, 諸井勝之助・若杉敬明編「現代経営財務論」, 1984年, pp.42-69
- 紺谷典子,「株式市場における投資家行動と市場効率」,「計測室テクニカル・ペーパー」, 日本証券経済研究所 No. 44, 1978年, pp.83-94
- 榊原茂樹,「ＣＡＰＭの再検討と企業規模効果」,「国民経済雑誌」, 147(5), 1983年, pp.88-112

——,「現代財務理論」, 千倉書房, 1986年

- 佐藤周,「日本におけるβリスクの実証研究」,「経済理論」, 和歌山大学, 199, 1984年, pp.53-88
- 浜尾泰,「ポートフォリオ理論 ＡＰＴ一金融資産運用の尺度に」,「日本経済新聞・経済教室」, 1986年8月22日
- 堀本三郎,「わが国における裁定評価理論(ＡＰＴ)の検証」,「彦根論叢」, 滋賀大学, 231, 1986年, pp.43-54

国際委員会

APORS 論文誌 "APJOR" へのご投稿とご購読の依頼

皆様ご案内のとおり, 1985年から太平洋地区のＯＲ学会連合 (APORS=Association of Asian-Pacific Operational Research Societies) が IFORS の下部機関として発足し, 日本のＯＲ学会がその幹事役を努めることとなり, 若山邦紘教授 (法政大学) が事務局長に就任されています.

APJOR (Asia-Pacific Journal of Operational Research) は, その Official Journal という性格から, APORS 加盟各国から Board of Editorial Advisers へ参加することが求められており, 日本ＯＲ学会からは若山氏のほかに森村英典会長, 茨木俊秀教授 (京都大学) が参加されています. これからも同誌を一層もり立ててゆくため, 論文の投稿・雑誌の購読についてご協力をお願いいたします.

お問合せは学会事務局へどうぞ.
(Tel. 03 (815) 3351)