# 大規模システムの多目的問題

島　孝司

## 1. はじめに

多目的計画問題は60年代後半から80年代にかけ積極的に研究され，今日，多くの成果が得られている．ここでは，大規模システムにおける多目的計画問題について，筆者が指導を受けた，現バージニア大学のHaimes教授のグループのアプローチの中から，特に筆者が研究を行なっているHierarchical Overlapping Coordinationと Hierarchical Holographic Modelingに焦点を当てご紹介したい．

## 2. 大規模システムの 多目的問題について

多目的計画問題には，単数，複数あるいはグループからなる意思決定者が存在する．これらの意思決定者が，モデル化された問題の非劣解の集合の中から，選好を表明し，望ましい解，選好解を求める．社会システム，経営システム，あるいは経済システムなどの大規模なシステムの計画問題になると，意思決定の構造は非常に複雑になり，問題領域に存在する組織全体が意思決定に関わることになる．組織（あるいは主体）は通常，下位レベルがサブシステムからなる階層構造をもつ．たとえば，マルチレベル構造をもつ生産あるいは経営システム，地方自治体をサブシステムに持つ社会システムなどを考えていただきたい．このような大規模，複雑な構造をもつシステムにおいては，情報や知識は分散され，意思決定者のもつ問題意識やそれに対する選好もそれぞれのサブシステムに固有のものとなる．問題解決，意思決定は，システムの全体に関心をもつ中央の意思決定者と，それぞれの部分問題に関心をもつ下位サブシステムの意思決定者たちとの，協調，協力によってはじめて，効果的に行なわれる．また，中央の意思決定者が存在せず，サブシステムの意思決定者たちの協力により，問題が効果的に解決される場合も存在する．ここではまず，システムの問題領域に，複数の，互いに重複する分割が存在する場合の協調方式である Hierarchical Overlapping Coordination についてご紹介したい．

### 2.1 Hierarchical Overlapping Coordination について

システムの構造が大規模，複雑になると，問題領域に複数の異なる分割が存在し，各分割のサブシステムにそれぞれ意思決定者が存在する場合が生じる．各分割は，それぞれ異なる視点にもとづく，システムの1つの側面であり，独自の機能，情報，視点あるいは知識をもっている．経営システムにおける一例として，生産，製品部門と販売部門を各側面としてもつマトリックス組織がある．このようなシステムには，製品別に分けられたサブシステムからなる分割と，マーケットあるいは地域別に分けられたサブシステムからなる分割が存在する．

社会システム問題の一例としては大規模な地域開発計画問題がある．Haimesはマミー・リバー流域の水資源地域開発問題（Maumee River Basin Level-B Planning）において地方自治点をサブシステムとしてもつ地域あるいは行政的な分割（地政分割）と，水資源，環境汚染などを管理する，連邦政府機関をサブシステムとしてもつ分水嶺，水資源による分割（水文分割）の2つの異なる分割が存在することを報告している[6]．

これらのシステムにおいて，1つの分割の意思決定は，他の分割に強い影響を与える．意思決定者たちの選好構造が異なる場合，分割間やサブシステム間に重大なConflictが生ずる．このようなシステムの計画，管理，運営はシステムに存在する意思決定者たちの協調による合意形成があってはじめて，効果的に達成される．また，Conflictを解消し，協調，協力を達成するための方法論が必要となる．

Haimesはこのような構造をもつシステムの協調方式としてHierarchical Overlapping Coordination（HOC）を提案した[2]．そこでは，システムの側面を構成する各分割は，互いに完全に重複したもの，つまり，まったく共通の目的，制約，意思決定変数をもつものと仮定されている．Overlapping Coordination の概念は，

しま　たかし　金沢女子短大情報処理学科
〒920-13 金沢市末町10

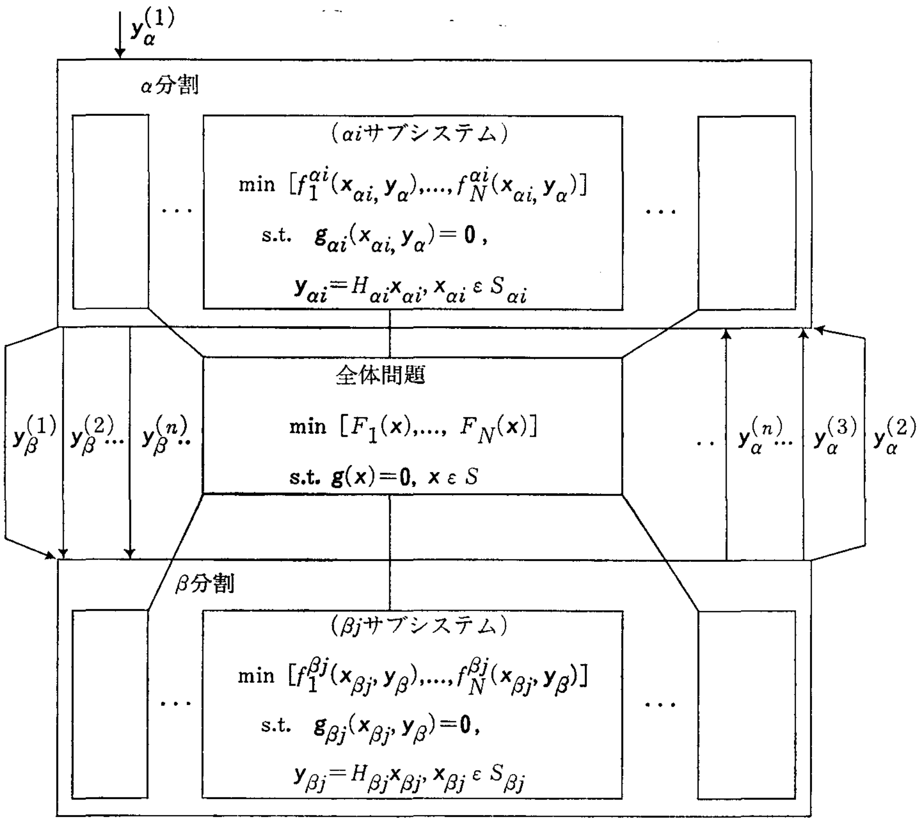



**図 1 問題の概略図**

[ 6 ]により単一の目的関数をもつ最適化問題として定式化され，最適化計算手法としての性質が[ 6 ]や[ 7 ]において考察された．また，[ 3 ]や[ 4 ]，[ 8 ]らにより多目的問題に拡張された．

多目的問題における Overlapping Coordination について，以下に簡単に考察する．厳密な議論は，たとえば[ 3 ],[ 4 ],[ 6 ],[ 8 ],[10]などを参考にされたい．

見通しをよくするためにまず Overlapping Coordinationの問題の概略図を図 1 に示す．図では簡単のため $\alpha$ と $\beta$ の 2 つの分割が存在すると仮定されている．それぞれの分割のもつ問題は，元の大きな全体問題を 2 通りの異なる方法で分割したものであり，$\alpha$，$\beta$ 分割の問題と元の全体問題は，本質的には同じものである．ここで，同じく見通しをよくするために Top-down 方式と呼ばれる意思決定の構造をもつ問題の協調方式について，詳細は後述することにして，その概略を簡単に紹介する．

たとえば，どちらかの分割のサブシステム間に互いに共有される意思決定変数が存在せず，まったく結合関係がなければ，全体問題の解は，単にその分割の部分問題を解くことにより得られる．しかし，社会システムなどの大規模な問題では，各分割のサブシステム間に互いに共有される決定変数が存在し，1 つのサブシステムの決定が，他のサブシテスムに大きな影響を与える．このようなサブシステム間の干渉関係，結合関係を表わす決定変数を，干渉変数あるいは結合変数と呼ぶことにする．図の中の $\boldsymbol{y}_\alpha, \boldsymbol{y}_\beta$ がそれぞれの分割のサブシステム間の干渉変数である．干渉変数を適当に固定することにより，全体問題は部分問題に分割して解くことができる．しかし，部分問題の解は，干渉変数の値が全体問題の中の対応する解の値に固定されない限り，全体問題の解には一致しない．Overlapping Coordinationでは，先に述べた $\alpha$ 分割と $\beta$ 分割の問題が，それぞれ元の全体問題に等しいという関係を利用し干渉変数の値を定める．それぞれの分割の部分問題を交互に解くことにより，徐々に干渉変数の値を改善し，最終的には全体問題の解を求める．また，多目的問題では，選好が意思決定者によって表明されなければならない．Top-down方式では，それぞれの分割の問題が解かれるごとに，得られた解をもとに，

意思決定者が全体問題に対して選好を表明する．後に詳しく示すように，それらの選好はそれぞれの部分問題の選好に分解され，部分問題はこの分解された選好と送られた干渉変数のもとで最適化されることになる．

まず最初に$\alpha$分割の干渉変数が実行可能な値に適当に固定される．初期値にもとづく選好が意思決定者により表明され，次に部分問題の選好に分解される．この分解された選好と固定された干渉変数の値を使って$\alpha$分割の部分問題が解かれる．得られた部分問題の解の中から$\beta$分割の干渉変数に対応する解を選び，これを情報として$\beta$分割へ送る．意思決定者は$\alpha$の解にもとづく選好を新たに表明し，部分問題の選好に分解する．$\beta$分割では，$\alpha$から送られた干渉変数の値と部分問題に分解された新しい選好のもとで，各部分問題が解かれる．次に，同様にこれらの解の中から$\alpha$分割の干渉変数に対応する解を選び，それらの値を$\alpha$分割へ情報として送る．$\beta$の解にもとづく新しい選好が与えられ，再び$\alpha$分割の問題が解かれ，収束条件が満たされるまでこれが繰り返される．このように，$\alpha$分割と$\beta$分割がそれぞれの干渉変数の値を情報交換し，それぞれが部分問題を交互に解くことにより，互いに助け合って，全体問題の選好解を求めようとしている．また，$\alpha$と$\beta$分割は共通の干渉変数をもたないものとする．これはもし共通の干渉変数をもつとすると，その変数についてはどちらの分割の問題においても，最適化されないからである．

次に，定式化について述べる．いま，システムの全体問題が以下のように記述されるとする．計画問題の多くはこのような形で記述される．

$$\min\,[F_1(\boldsymbol{x}),\ldots,F_N(\boldsymbol{x})]\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\varepsilon S \qquad (1)$$

（ここで，$S$は$R^n$の部分空間である．）この時，全体問題を$\alpha$から見た問題は以下のように記述される．

$$\min\,[F_1(\boldsymbol{P}^{-1}{}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha),\ldots,F_N(\boldsymbol{P}^{-1}{}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha)] \qquad (2)$$

$$\mathrm{s.t.}\quad g\,(\boldsymbol{P}^{-1}{}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha)=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_\alpha\varepsilon\, S_\alpha \qquad (3)$$

$\beta$から見た問題もまったく同じように，上の問題の$\alpha$と$\beta$を置き換えたものとして記述される．

ここで，$P_\alpha, P_\beta$は変数の並べ替えを表わす1または0からなるマトリックスで$\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_\beta=\boldsymbol{P}_\beta\boldsymbol{x}$であり，$\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}_\beta, \boldsymbol{x}_\beta=\boldsymbol{P}_{\beta\alpha}\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{P}_\alpha\ \boldsymbol{P}_\beta{}^{-1}, \boldsymbol{P}_{\beta\alpha}=\boldsymbol{P}_\beta\ \boldsymbol{P}_\alpha{}^{-1}$である．また，$S$と$S_\alpha$は同じ空間である．この変数の並べ替えはサブシステムへの分割を容易にするために行なわれる．たとえば，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)^T$とする．いま，$(x_1,x_5)^T$と$(x_2,x_3,x_4,x_6,x_7)^T$がそれぞれ$\alpha$1，$\alpha$2の決定変数とすると，この場合の$P_\alpha$は$\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{x}_\alpha=(x_1,x_5,x_2,x_3,x_4,x_6,x_7)^T$に並べ替えるマトリックスである．

いま，$\alpha$，$\beta$がそれぞれ$n_\alpha, n_\beta$のサブシステムからなるとする．各々の分割の中のサブシステム間で共有される決定変数を，先に述べたように，干渉変数あるいは結合変数と呼び，それらを$\boldsymbol{y}_\alpha, \boldsymbol{y}_\beta$とする．このような干渉変数を導入し，それらを固定することによって，問題を各々のサブシステムの部分問題に分割して解くことができる．まず，干渉変数を導入することにより，上の問題(2)，(3)は以下のように記述されるとする．

$$\min\,[F_1{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha),\ldots,F_N{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha)] \qquad (4)$$

$$\mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{g}_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha)=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_\alpha\,\varepsilon\, S_\alpha,\ \boldsymbol{y}_\alpha=H_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha \qquad (5)$$

ここで，$F_k{}^\alpha=F_k(k=1,\ldots,N)$，$\boldsymbol{g}_\alpha=\boldsymbol{Q}_\alpha\,\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{Q}_\alpha$は同じく制約式の並べ替えを表わすマトリックスである．$H_\alpha$は$\boldsymbol{x}_\alpha$の中から干渉変数を選び出す1または0からなるマトリックスである．たとえば，先の例で$\boldsymbol{x}_2$を便宜上は$\alpha$2の決定変数となっているが，実は$\alpha$1と$\alpha$2に共有される，協調すべき決定変数，つまり干渉変数と仮定すると$\boldsymbol{y}_\alpha=H_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha=x_2$を与える(0,0,1,0,0,0,0)が$H_\alpha$である．また$x_1+x_5+x_2=0, x_2+x_3+x_4=0, x_4+x_6+x_7=0$なる制約があるとすると，これらは$x_1+x_5+y_\alpha=0$と$x_2+x_3+x_4=0, x_4+x_6+x_7=0, x_2=\boldsymbol{y}_\alpha$となり，分割後は前式が$\alpha$1に，後の3式が$\alpha$2に属することになる．このように目的関数や制約式は干渉変数の導入と固定により分割可能となり，図に示されるようなサブシステムの各部分問題に分割される．ここで$f_k{}^{\alpha i}$は$F_k$の部分問題に分割された目的関数である．また$\boldsymbol{x}_{\alpha i}, \boldsymbol{y}_{\alpha i}, \boldsymbol{g}_{\alpha i}, H_{\alpha i}$なども，それぞれの分割されたものである．

$\alpha$と$\beta$の問題は前に述べたように同じものであり$\boldsymbol{x}_\alpha$や$\boldsymbol{x}_\beta$は実は同じものである．これを利用するとそれぞれの干渉変数の間には，次のような関係が求められる．

$$\boldsymbol{y}_\alpha=H_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha=H_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{x}=H_\alpha\boldsymbol{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}_\beta,\ \boldsymbol{y}_\beta=H_\beta\boldsymbol{x}_\beta=H_\beta\boldsymbol{P}_\beta\boldsymbol{x}=H_\beta\boldsymbol{P}_{\beta\alpha}\boldsymbol{x}_\alpha \qquad (6)$$

これまでは主に線形制約$A\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$をもつ問題について研究が行なわれている([3],[4],[8])．

意思決定と協調の構造には，問題によりいろいろなタイプが考えられる．[3],[8]などでは，中央の意思決定者が全体の多目的問題に関して選好を表明し，下位のそれぞれの分割のサブシステムのmanagerは干渉変数を分割間で情報交換しながら，その表明された選好にしたがって単に最適化のみを行なうという，いわゆるTop-down方式の意思決定が考えられている．また，マトリックス構造をもつ経営システムへのTop-down方式の応用，水資源問題への応用についても考察されている[8]．

また，島[10]には，中央の意思決定者と各分割のサブ

システムの意思決定者が，同時にそれぞれの多目的問題について選好を表明し，それらの選好を協調し妥協解にいたる，いわゆるHybrid 方式の意思決定が考えられている．また，中央とサブシステム間を結ぶ分散型の意思決定支援システム（DSS）上での協調方式の実行が提案されている．ここでは，[3]，[8]などにしたがってTop-down 方式の意思決定構造をもつ Overlapping Coordinationについて紹介する．

Top-downの意思決定構造をもつ問題においては，中央の意思決定者のみが選好を表明する．ここでは簡単のため，中央に1人の意思決定者が存在すると仮定する．それぞれの分割を代表する複数の意思決定者が，まったく共通の選好構造をもつ場合も，このように考えることができる．ここで，目的関数 $F_k$ は以下の条件を満たすとする．

$$F_k=F_k^{\alpha}(f_k^{\alpha 1},\dots,f_k^{\alpha n\alpha})=F_k^{\beta}(f_k^{\beta 1},\dots,f_k^{\beta n\beta}) \quad (7)$$

(7)式は，$\alpha$，$\beta$分割のそれぞれ$k$番目の目的関数は，元の全体問題の$k$番目の目的関数に等しく，またそれぞれが，サブシステムの部分問題の目的関数から構成されていることを表わしている．このような，形をもつもので最も代表的なものは，全体の目的関数がサブシステムの目的関数の和で表わされるものである．また，$F_k$，$f_k^{\alpha i}$,$f_k^{\beta j}$ は微分可能な凸関数で主目的関数 $F_1$,$f_1^{\alpha i}$,$f_1^{\beta j}$ は強凸とする．よって，目的関数の少なくとも1つは非線形である多目的問題を考えることになる．ここで，次のように定義される $\lambda_{1k}(\boldsymbol{F})$ を考える．

$$\lambda_{1k}(\boldsymbol{F})=\left.\frac{\dfrac{\partial U}{\partial F_k}}{\dfrac{\partial U}{\partial F_1}}\right|_{\boldsymbol{F}} \quad (8)$$

（ここで$U=U(F_1,\dots,F_N)$は意思決定者が心に秘かにもつ選好関数(underlying utility)を表わしている．）

$\lambda_{1k}(\boldsymbol{F})$は，点$\boldsymbol{F}$における限界代替率であり，同時に後述するように$F_1$と$F_k$の間の$\boldsymbol{F}$におけるトレードオフを示している．この$\lambda_{1k}(\boldsymbol{F})$を要素としてもつ vector を$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{F})$とし，点$\boldsymbol{F}$における無差別 trade-off vector とここでは呼ぶことにする．ここで，$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{F})=(1,\lambda_{12}(\boldsymbol{F}),\dots,\lambda_{1N}(\boldsymbol{F}))^T$，$\boldsymbol{F}=(F_1,\dots,F_N)^T$である．$\alpha$と$\beta$問題は本質的に等しく，また(7)式より，目的関数の順番も等しいので，

$$\lambda(\boldsymbol{F})=\lambda^{\alpha}(\boldsymbol{F}^{\alpha})=\lambda^{\beta}(\boldsymbol{F}^{\beta}) \quad (9)$$

ここで，$\lambda^{\alpha}(\boldsymbol{F}^{\alpha})$，$\lambda^{\beta}(\boldsymbol{F}^{\beta})$はそれぞれ$\alpha$，$\beta$分割の無差別trade-off vector である．$\lambda_{1k}(\boldsymbol{F})$は全体問題の目的関数$F_1$と$F_k$の間のトレードオフを示すもので，各分割のサブシステムの，たとえば$f_1^{\alpha i}$と$f_k^{\alpha i}$あるいは$f_1^{\beta j}$と$f_k^{\beta j}$の間のトレードオフを表わしてはいない．実際には部分問題が最適化されるので，サブシステムにおけるトレードオフを求める必要がある．それぞれの分割のサブシステムのトレードオフと全体問題のトレードオフの関係を表わすために Tarvainen らにより求められた次式を利用する([9])．

$$\lambda^{\alpha i}(\boldsymbol{f}^{\alpha})=\Big(\sum_{k=1}^{N}\lambda^{\alpha}{}_{1k}(\boldsymbol{F}^{\alpha})\frac{\partial F_k{}^{\alpha}(\boldsymbol{f}^{\alpha})}{\partial \boldsymbol{f}^{\alpha i}}\Big)^T \quad (10)$$

$$\lambda^{\beta j}(\boldsymbol{f}^{\beta})=\Big(\sum_{k=1}^{N}\lambda^{\beta}{}_{1k}(\boldsymbol{F}^{\beta})\frac{\partial F_k{}^{\beta}(\boldsymbol{f}^{\beta})}{\partial \boldsymbol{f}^{\beta j}}\Big)^T \quad (11)$$

ここで，たとえば $\lambda^{\alpha i}=(\lambda_1{}^{\alpha i},\lambda_2{}^{\alpha i},\dots,\lambda_N{}^{\alpha i})^T=\lambda_1{}^{\alpha i}(1,\lambda_{12}{}^{\alpha i},\dots,\lambda_{1N}{}^{\alpha i})^T$，$\lambda_{1k}{}^{\alpha i}$はサブシステム内のトレードオフ，$\lambda^{\alpha i/\beta j}(=\lambda_1{}^{\alpha i}/\lambda_1{}^{\beta j})$はサブシステム間のトレードオフを示す．また $\boldsymbol{f}^{\alpha i}=(f_1{}^{\alpha i},\dots,f_N{}^{\alpha i})^T$，$\boldsymbol{f}^{\alpha}=(\boldsymbol{f}^{\alpha 1T},\dots,\boldsymbol{f}^{\alpha n\alpha T})^T$etc. である．たとえば$\boldsymbol{F}$における$F_1$と$F_k$の間の無差別 trade-off $\lambda_{1k}(\boldsymbol{F})$が意思決定者により与えられれば(9)式を考慮に入れると，各分割のサブシステムの trade-off $\lambda^{\alpha i}(f^{\alpha})$，$\lambda^{\beta j}(f^{\beta})$は(10)，(11)式により決定される．このサブシステムに分解されたトレードオフを用いて部分問題が解かれることになる．次に協調方式について考える．（$n$は iterationnumber である）

1)まず，実行可能な初期点を推定し，中央の意思決定者(以下DM)は，この点にもとづく無差別 trade-off vector $\lambda^{\alpha}(F^{\alpha})^{(1)}$を与える(詳細は3))．$n=1$とする．

2) さて，$\lambda_{1k}{}^{\alpha}(F^{\alpha})^{(n)}$は全体問題の目的関数に対して表明された無差別 trade-off である．問題はサブシステムで最適化されるので，(10)式を利用して$\lambda^{\alpha}{}_{1k}(F^{\alpha})^{(n)}$を$\alpha$分割の各サブシステムの trade-off に分解する．DMは，求められた$\lambda^{\alpha i}(f^{\alpha})^{(n)}$を$\alpha$分割のサブシステムへ送る．各サブシステムの manager はDMにより与えられたtrade-off vectorと$\beta$分割から送られた干渉変数$\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)}$の値をもとにサブシステムの部分問題を最適化する．たとえば$\alpha_i$サブシステムは次のような問題を最適化する．

$$\min f_1{}^{\alpha i}(\boldsymbol{x}_{\alpha i},\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)})+\sum_{k=2}^{N}\lambda_{1k}{}^{\alpha i(n)}f_k{}^{\alpha i}(\boldsymbol{x}_{\alpha i},\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)}) \quad (12)$$

$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{g}_{\alpha i}(\boldsymbol{x}_{\alpha i},\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)})=0,\ \boldsymbol{y}_{\alpha i}{}^{(n)}=H_{\alpha i}\boldsymbol{x}_{\alpha i},\ \boldsymbol{x}_{\alpha i}\in S_{\alpha i} \quad (13)$$

ここで，$\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)}=H_{\alpha}P_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}_{\beta}{}^{(n-1)}$ for $n\geqq 2$，$\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(1)}$は1)で与えられる実行可能な初期値である．求められた$\alpha$分割の解を$\boldsymbol{x}_{\alpha}{}^{(n)}$とする．$\boldsymbol{x}_{\alpha}{}^{(n)}$は各サブシステムの解$\boldsymbol{x}_{\alpha i}{}^{(n)}$から構成されている．$\alpha$分割は求められた解や目的関数の値などをDMへ送る．また，$\beta$分割へ$\boldsymbol{y}_{\beta}{}^{(n)}$の値を送る．ここで，$\boldsymbol{y}_{\beta}{}^{(n)}=H_{\beta}P_{\beta\alpha}\boldsymbol{x}_{\alpha}{}^{(n)}$である．

3)DMは$\alpha$分割より送られた解や目的関数値などの情報にもとづいて，新しい無差別 trade-off vector を推定

する．たとえばDMに対して“$F_1$ が $\triangle F_1$ 変化することに対して，他の目的関数値を一定として $F_k$ のどのくらいの値がそれを補償するか”と質問することにより，目的関数の空間の点 $(F_1,\ldots,F_N)^T$ にもとづく無差別 trade-off vectorを近似的に求めることができる．この場合，(8)式の $\lambda_{1k}$ は $-(\triangle F_1/\triangle F_k)$ で近似される．ここで一方の増分が正の時，他方は負となり $\lambda_{1k}$ は正となる．また，質問では選好関数値が不変として $\lambda_{1k}$ を求めているので，これを無差別トレードオフと呼ぶことにした．

4）DMは求められた $\lambda^{\beta}{}_{1k}(F^{\beta})^{(n)}$ を今度は(11)式により，$\beta$ 分割の各サブシステムのtrade-off vectorに分解し，$\beta$ 分割へ送る．各サブシステムのmanagerはDMにより与えられたtrade-offと，$\alpha$分割から送られた干渉変数 $\boldsymbol{y}_{\beta}{}^{(n)}$ の値をもとに，サブシステムの部分問題を最適化する．$\beta$ のサブシステムの部分問題は(12)，(13)式と同様に記述される．求められた $\beta$ 分割の解を $\boldsymbol{x}_{\beta}{}^{(n)}$ とする．$\boldsymbol{x}_{\beta}{}^{(n)}$ は同じく各サブシステムの解 $\boldsymbol{x}_{\beta j}{}^{(n)}$ から構成されている．$\beta$ 分割は求められた解や目的関数の値などの情報をDMへ送る．また，$\alpha$ 分割へ $\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)}=\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}_{\beta}{}^{(n)}$ の関係を利用して $\boldsymbol{y}_{\alpha}{}^{(n)}$ の値を送る．

このstep 4)の $\beta$ 分割の役割はstep 2)の $\alpha$ 分割の役割とまったく同じである．

5）DMは $\beta$ 分割より与えられた情報をもとに無差別trade-off vectorを求める．$n=n+1$ とする．2)へ戻る．この手順を収束条件が満たされるまで繰り返す．

上の方法では，まず $\alpha$ 分割の問題が先に解かれたが，$\beta$ が先に解かれてもかまわない．また，すべてのイテレーションにおいてtrade-off voctorは正とする．収束後全体問題に対する選好解が解られる．このように，Top-down方式では，中央の意思決定者が，各イテレーションの各分割の部分問題が解かれた後に得られる情報をもとに，選好を表明する．全体の大きな問題が解かれる代わりに，それぞれの分割で部分問題が解かれる．各分割は干渉変数 $\boldsymbol{y}_{\alpha},\boldsymbol{y}_{\beta}$ を情報交換し，意思決定者の望む全体問題の選好解に収束するように，互いに助け合っている．収束性の問題については[6]，[7]，[8]を参照されたい．

### 2.2 Hierachical Holographic Modeling について

前節では，システムの各側面，分割が本質的に同一のモデルをもつ場合を考えた．しかし，各側面がそれぞれ1つの独立した主体として存在し，それぞれが対処すべき問題に対して，異なるモデルをもつ場合の方が，現実には数多くみられる．各主体は異なるモデルをもつが，目的，制約，意思決定変数の一部分を共有する．各主体は，下位レベルがサブシステムからなる階層構造をもち，それぞれの全体問題は，それらのサブシステムの部分問題に分割される．

複数の主体からなり，それぞれが異なるがしかし，部分的には重複する問題をもつ場合の合意形成を効果的に行なうためには，主体間の利害対立の調整，協調と同時に，各主体内の中央の意思決定者と各サブシステムの意思決定者との意見調整，協調が必要である．Haimes[1]はこのような問題に対してHierarchical Holographic Modelingの概念を提唱したが，これは先に述べたOverlapping Coordinationの素直な拡張として理解される．そこではHolographyが3次元全体像を再現するように，各主体の異なる視点にもとづく，異なるモデルの統合，総合化により，もとの問題の全体像を再現し，主体間，また主体内階層間の協調により合意の形成にいたる方法論の構築をめざしている．

Holographicモデルをもつ問題の協調方式に関するアプローチとしては，Thadathilによるもの[4]などがある．また，島[11]はHolographic Modelingの概念のDSSネットワーク上での実現について提案している．また，[5]にはHolographic Modelingの国際紛争解決への応用可能性が議論されている．特に，各国政府間をDSSネットワークで結び，経済，環境，資源問題などの国際的紛争，摩擦の解決のための支援手段の1つとしようという考えは，実現にはかなりの困難が予想されるが，きわめて興味深いものであろう．

## 3. おわりに

Overlapping CoordinationやHolographic Modelingの研究はまだ初期の段階にあり，現在，概念にもとづく方法論の研究が行なわれているが，さらに応用も含め実用化をめざす研究が必要であろう．また，これらのアプローチのもつ概念自体は，広い普遍性をもつと思われ，水資源開発問題に限らない，社会システム，経済システムなどの，いろいろな分野への応用が期待される．おわりに，本稿作成に当たりご助言いただいた住商コンピューターサービス㈱新村秀一氏に深く感謝の意を表します．

### 参考文献

[1] Haimes, Y.Y.: Hierarchical holographic modeling, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.,

Vol. SMC-11, No. 9, 1981.

[2] Haimes, Y.Y. and D. Macko: Hierarchical structures in water resources systems management, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. Vol. SMC-3, No.4, 1973.

[3] Haimes Y.Y. and T. Shima: Overlapping Coordination, in Encyclopedia of Systems and Control, ed. Singh, M. G., Pergamon Press, London, 1989, in press.

[4] Haimes, Y. Y., K. Tarvainen, T. Shima and J. Thadathil: Hierarchical Multiobjective Analysis of Large Scale Systems., to be published by Hemisphere Publishing Co., a Subsidiary of Harper & Row Publishers Inc., N. Y., to appear in 1988.

[5] Haimes, Y.Y. and A.Weiner: Hierarchical holographic modeling for conflict resolution, Philosophy of Science, 53, 1986.

[6] Macko, D. and Y.Y. Haimes: Overlapping coordination of hierarchical structures, IEEE Trans. Syst., Man., Cybern., Vol.SMC-8, No. 10, 1978.

●ミニミニ●　　●OR●

# 結び目の形

箸置きというもの，昨今では省略されることが多くなったようである．筆者の行きつけの焼鳥屋さんでも同様である．仕方がないから，割り箸の紙袋を結んで箸置きの代わりにしている．帯を結んだときにできる小枠な形は陶製の本物の箸置きの意匠としてもしばしば見かけるものだ．

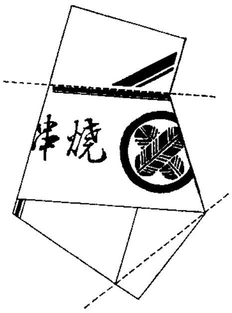


図1

ところが，よく見るとこの結び目は正5角形をしている．正5角形になるのは無論キチンと結んだときに限るのだが，作図の繁雑な正5角形がこんな所にできるのは楽しい．（図1）

証明は，内角がどれも等しく108°になっていることを示せば，あとは帯の幅が一定であることから，正5角形になることが直ちにみちびかれる．内角が108°になることの証明のあらすじは次の通りである（図2, 3）

いま，$l$ および $m$ を縁とする帯を角度 $\alpha$ で折ると，帯がかさなり合う角度 $\beta$ は

(*)　　$\alpha+2\beta=180°$

という関係を満たす．拡げれば一直線になるからである．

折り目をＰＱ，帯の縁 $l$ と $m$ が交わる点をＲとすれば，直ちにわかるよう△ＰＲＱは底角を $\beta$ とする二等辺三角形である．また，ＰＲの長さは，$\alpha$ が鋭角の範囲では，$\alpha$，したがって底角 $\beta$ と1対1対応する．

次に，Ｒを一端とする線分ＲＳで帯をもう一度折りかえす．今度はしかし縁 $m$ が点Ｐを通るようにする．また，縁 $l$ が自分自身と交わる点をＴとしよう．こうして五角形 PQSRT ができあがる．

今度もまた△ＲＰＳが二等辺三角形になる．ところがこの△ＲＰＳはさきの△ＰＲＱと合同である．一辺ＰＲを共有しているので，底角も $\beta$ になるからである．

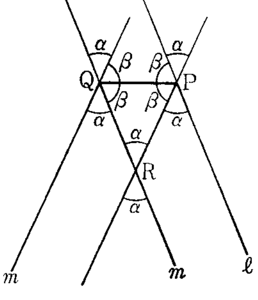


図2

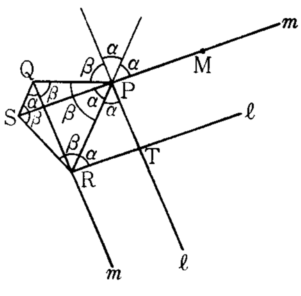


図3

[7] Shima, T. and Y.Y. Haimes: Convergence properties of hierarchical overlapping coordination, IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., Vol. SMC-14, No.1, 1984.
[8] Shima, T., Y.Y. Haimes, K.Tarvainen and K. Sung: Applications of hierarchical overlapping coordination with multiple objectives, working paper, Case Western Reserve University, 1986, To appear in Large Scale Systems, 1988.
[9] Tarvainen, K. and Y.Y. Haimes:Coordination of hierarchical multiobjective systems: Theory and Methodology., IEEE Trans. on Syst., Man, & Cybern., SMC-12, No.6, 1982.
[10] 島 孝司：大規模システムの分散型ＤＳＳとOverlapping coordination の新解法について，第12回システムシンポジウム講演論文集，1986
[11] 島 孝司：社会システムの DSS Network と Hierarchical Holographic Modeling による意思決定支援，第13回システムシンポジウム講演論文集，1987.

さらにTPに沿ってもう一度帯を折る．このときPMがQPに重なることが必要である．ここにMは直線SP上の点である．しかし，そのためには，

$$\angle QPT=\angle TPM$$

が成立しなければならない．

$$\angle QPT=\alpha+\beta$$

$$\angle TPM=180^\circ-2\alpha$$

であるから，

$$(**)\qquad \alpha+\beta=180^\circ-2\alpha.$$

2つの関係式(*)および(**)から$\alpha$と$\beta$を求めれば，

$$\alpha=180^\circ/5$$

$$\beta=360^\circ/5$$

となる．したがって，五角形PQSRTの4つの内角∠P, ∠Q, ∠S, ∠Rについては，

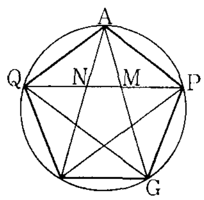
$$\angle P=\angle Q=\angle R=\angle S=\alpha+\beta=540^\circ/5=108^\circ$$

となる．さらに，凸五角形の内角の和が540°であることから，

$$\angle T=108^\circ$$

がえられる．こうして五角形PQSRTの内角がどれも等しいことが言えた．

正五角形が西欧の文化史上にたびたび姿を表わすことはよく知られている．コルパスと定規による正五角形の作図は2世紀にアレキサンドリアの天文学者プトレマイオスの天文学書「アルマゲスト」にすでに記載されており，遠近法の研究で知られる16世紀のドイツの画家デューラーは著書「ドイツ幾何学」でこれを紹介している．デューラーの時代，正五角形はゴシック様式の装飾，もうひとつは火器導入以後の城塞の縄張りの基本にこの形が用いられたのである[1]．(函館の五稜郭や米国国防省の建物もこの伝統にしたがうものである)




$$\frac{MG}{AG}=\frac{AM}{MG}=\frac{NM}{AM}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

**図 4**

また，正五角形の随所に隠されている黄金比（図4）や星形は呪術的な空想を引き起こしたことであろう[2]．映画や演劇でみるオカルト場面にはこの図形がよく出てくる．

ところが，わが国の文化的伝統には正五角形はあまり登場しない．日本の伝統的な建築にも，六角形や八角形はあっても五角形はあまり見かけない．しかし，帯を結んだ形なら，図案としてよく見かけるものである．わが国の伝統的な意匠のなかにも正五角形がこんな所に隠れていたのだ．

（からくり堂主人）

[1] Dan Pedoe "Geometry and the Liberal Arts," Penguin Books Ltd.
[2] Matila Ghyka "The Geometey of Arts and Life," Dover, 1946