効用理論の最近の発展

——記述的モデルを中心にして——

田村　担之

1. まえがき

最近，総理府が発表した世論調査によると,「経済」と「環境」に対する国民意識には，特に若い層に「環境保護重視」の考え方が33.9%あるなど，従来の経済発展重視型から徐々に環境保護重視型への変化の兆しが現われている．このような価値観の変遷や多様化は現代社会の宿命といえるが，効用理論は人間との情報交換によってその人の価値観を定量的にモデル化する理論・方法論を提供し，ひいては意思決定者とコンピュータとのコミュニケーションを通じて意思決定支援システムを構成する手立てとして注目されている．

人々の行動原理として，ベルヌーイは「人々は期待金額を最大化して行動しているのではなく，期待効用を最大化している.」と説明し，お金に対する効用関数として対数関数を提案した[1],[2]. これが効用関数の発祥である．ただし，彼は，1)この効用関数をどのようにして測定するのか？　2)なぜ期待効用が人々の合理的な行動の規範となるのか？　についてはふれなかった．したがって，ベルヌーイのモデルは，人々の行動原理に関する一種の記述的モデル (descriptive model) と考えることができる．

von Neumann-Morgenstern[3]は，いくつかの公理を設定し，期待効用最大化が人々の合理的行動の規範となることを証明して，はじめて規範的モデル(normative model) を与えた[2].

本講では，von Neumann-Morgenstern の期待効用理論を基礎にして，記述的モデルおよび規範的（あるいは処方的）モデルという2つの側面から

1) 期待効用理論
2) 期待効用理論に対する種々の反例
3) 期待効用理論を拡張した記述的モデル
4) 今後の課題

などを概観する．

たむら　ひろゆき　大阪大学　工学部
〒565 吹田市山田丘2−1

2. 期待効用理論

2.1 期待効用仮説

意思決定者 (Decision Maker, 以下DMと略す) が選択することのできる代替案の集合を

$$A = \{a,\ b, \ldots\}$$

とする．DMが代替案 $a \in A$ を選択したときに，結果 x_i が得られる確率を p_i，代替案 $b \in A$ を選択したときに結果 x_i が得られる確率を q_i，…とし，起こり得るすべての結果の集合を

$$X = \{x_1,\ x_2, \ldots\}$$

とする．このとき

$$p_i \geqq 0,\ q_i \geqq 0, \ldots\ \forall i$$
$$\sum_i p_i = \sum_i q_i = \ldots = 1$$

を満たす．また，X 上の効用関数を $u: X \to R$ とするとき，代替案 $a,\ b, \ldots$ を採用したときの期待効用は，おのおの

$$E_a = \sum_i p_i u(x_i),\ E_b = \sum_i q_i u(x_i) \qquad (1)$$

で与えられる．結果が1つの属性によって規定されるとき $u(x)$ を単属性効用関数といい，複数の属性（多目的）によって規定されるとき多属性効用関数という．

von Neumann-Morgenstern[3]は5つの公理を設定し，これらが成り立つときには，期待効用仮説「DMは代替案の集合Aの中から，期待効用が最大になる代替案を選択する」を満たす基数的効用関数 $u(x)$ が存在することを証明した．言いかえると，このときにはDMは

$$a \succ b \Leftrightarrow E_a > E_b,\ a \sim b \Leftrightarrow E_a = E_b \qquad (2)$$

という規範にしたがって代替案を選択することを意味する．ここで，$a \succ b$ は「代替案 a の方が b よりも好ましい」ことを表わし，$a \sim b$ は「a と b の好ましさが同等(無差別）である」ことを表わしている．

いま，$l_a,\ l_b, \ldots$ を，おのおの代替案 $a, b, \ldots$ を選択したときにDMが直面する"くじ" (lottery) とし，

$$l_a = (x_1, x_2, \ldots ;\ p_1, p_2, \ldots)$$

$l_b=(x_1, x_2, \ldots ; q_1, q_2, \ldots)$

と書き表わすことにする．ここで，(2) 式を次のように表現する．

$$a \succsim b \Leftrightarrow l_a \succsim l_b \Leftrightarrow u(l_a) \geqq u(l_b) \quad (2')$$

$$\Leftrightarrow E_a \geqq E_b$$

ただし

$$u(l_a)=u(x_1, x_2, \ldots ; p_1, p_2, \ldots)$$

$$\triangleq \sum_i p_i\ u(x_i)=E_a \quad (3)$$

(3)式は，くじの効用がくじの期待効用で表現されており，期待効用仮説そのものを表わしている．

2.2 単属性効用関数の同定

多属性効用関数を同定する場合にも，多くの単属性効用関数を同定し，これらの関数として多属性効用関数を求めることになる．したがって，ここでは期待効用仮説にもとづいて単属性効用関数を求める方法を述べておく．

DMが，くじ l_a の好ましさと，確実な結果 $\hat{x}$ の好ましさが無差別であると考えるとき，$\hat{x}$ をくじ l_a の確実同値額 (certainty equivalent) という[4]．このとき期待効用仮説より，次の関係が得られる．

$$u(\hat{x})=u(l_a)=\sum_i p_i\ u(x_i) \quad (4)$$

結果の集合 X において，x^0 を最悪の結果，x^* を最良の結果とする．そして，X 上の効用関数を

$$u(x^0)=0,\ u(x^*)=1$$

に正規化する．次に，x^* が確率 p で現われ，x^0 が確率 $(1-p)$ で現われるくじ $l=(x^*, x^0;\ p, 1-p)$ を考え，これを $\langle x^*, p, x^0\rangle$ と表わす．特に，$p=0.5$ のとき，このくじを50－50くじと呼び，$\langle x^*, x^0\rangle$ と表わす．いま，くじ $\langle x^*, p, x^0\rangle$ の確実同値額を x とすると

$$x \sim \langle x^*, p, x^0\rangle$$

を満たし，期待効用仮説より

$$u(x)=u(<x^*, p, x^0>)=p\,u(x^*)+(1-p)u(x^0)=p \quad (5)$$

を得る．

50–50くじをいくつか用いることによって，単属性効用関数を容易に同定することができる．

ここでは紙数の都合で詳細に立ち入ることはできないが，単属性効用関数を求めるさいに留意すべき点がいくつかあって，DMへの質問の仕方の違いによって，得られる効用関数が大幅に異なってくるという報告がある[5]，[6]．これは，後に述べる「期待効用仮説に対する反例」[7]–[9]とも関連する．

2.3 リスクに対する態度

リスクに対するDMの態度を次のようにして表現する[4]．

任意の非退化くじ l（くじ l においてどの1つの結果 $x_i \in X$ に対しても $p_i \neq 1$）に対して，DMがくじそのものよりも，くじの期待結果

$$\bar{x}=\sum_i p_i\ x_i$$

を好み

$$u(\bar{x})>u(l)=\sum_i p_i\ u(x_i) \quad (6)$$

を満たすとき，このDMのリスクに対する態度はリスク回避形 (risk averse) であるという．

このとき，効用関数 $u(x)$ は凹関数となり，効用関数の1階微分すなわち限界効用 (marginal utility) は逓減する．また，DMのリスクに対する態度がリスク中立形 (risk neutral) のとき $u(x)$ は線形となり，リスク志向形 (risk prone または risk seeking) のときには凸関数となる[2]，[4]．

Arrow-Pratt は，リスク回避の度合いを測る局所的測度として $-u''(x)/u'(x)$ を提案している[4]，[10]．この測度は $u(x)$ の正線形変換に対して不変で，$u(x)$ が x の線形または指数関数のときには一定値をとる．したがって，たとえばお金に対するDMの効用が線形あるいは指数関数で表わされるならば，お金に対するDMのリスク回避度は所持金の大小によらないことを意味する．

ここで次のことに注意しておく必要がある．いま仮りに，あるDMがお金に対して

$$u(10000)=1,\ u(0)=0,$$

$$u(3000)=u(<10000, 0>)=0.5$$

と答えたとすると，このDMは10,000円か0円かを確率0.5で得るのと，確実に3,000円得るのとを同程度に好ましいと思っている．このとき

$$u(10000)-u(3000)=u(3000)-u(0)=0.5$$

という関係を得る．これより，このDMにとって「所持金0のときに3000円を得るのと，所持金3000円のときに7000円を得るのとは同程度に好ましい」と言えるであろうか？ 答えはNoである[1]．すなわち，$u(x)$ によってDMの確実下の選好強さを測ることはできず，あくまでもリスク下のくじの良し悪ししか測れない点に注意を要する．これより，von Neumann-Morgenstern の効用関数は，すでに述べたように基数的効用関数とはいうものの，DMの選好を測るという観点からは単にくじの良し悪しに順序づけができる序数的効用関数でしかないとも言われている[7]．

2.4 多属性効用関数

結果 $x \in X$ が n 個の属性 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ によって特長づけられているものとする．このとき結果 x は順序対

$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$， $x_1 \in X_1$， $x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$

で表わすことができ，起こりうるすべての結果の集合 X は，直積集合 $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ で表わされる．これを n 属性空間という．

n 属性効用関数は，$X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ 上に u: $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to R$ として定義される．このような n 属性効用関数 $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を直接求めるには，複数の属性を同時に考慮してくじに関する選好判断をしなければならず，実際にはほとんど不可能である．そこで，DMの選好に関して複数の属性間に種々の独立性や依存性を仮定して，直接測定すべき効用関数の属性の次元を減少させる分解表現を求めることが重要な課題となる．

種々の独立性の中で，最もよく実地に適用されてきたのはKeeney[4]の効用独立性とその特別な場合としての加法独立性[11]である．なぜならば，複数の属性の間で相互に効用独立性が成立するときには，多属性効用関数が加法形または乗法形の分解表現によって表わされるからである[4]．

さらに，対象とする問題が大規模になり，互いに競合した属性間のトレードオフ関係が複雑になってくると，ある属性に関する条件付効用関数の形が，条件として与える他の属性のレベルに応じて変化する場合が現われる．このときKeeneyの効用独立性の仮定が崩れることになる．このときには，条件付効用関数の形の変化に着目し，いくつかの異なった条件レベルに対する条件付効用関数の間に凸依存性[12]（凸結合で表わしうる性質）を仮定して，Keeneyの効用独立性，Fishburnの2側面独立性[13]，Bellの補間独立性[14]などを特別な場合として含む一般的な分解表現を見いだすことができる．

この凸依存性にもとづく分解表現は，ある属性に関するDMのリスクに対する態度が，他の属性レベルに依存して変化する場合を表現できるので，記述的モデルとしても汎用性の高い多属性効用関数を構成することができる．しかも，そこで直接測定すべき効用関数は，多数個の単属性効用関数（条件付効用関数）だけでよいという特長を備えているので，見た目には複雑に見える分解表現も比較的容易に求まる．

2.5 アルゴリズム

多属性効用関数を同定するアルゴリズムについて，効用独立性・加法独立性を仮定する場合には，属性の数を大きくとることができる．

凸依存性を仮定する場合には，原理的には依存性の次数を増せばそれだけ厳密な効用関数の同定が可能になるが，DMの主観的判断の誤差を考慮すると高次の凸依存性は必ずしも実用的ではない．高々2次か3次の範囲で近似するのが限度であると思われる．属性の数 n については，コンピュータプログラムを作成する上で，現時点では $n=3$ が限度である．アルゴリズムの詳細については文献[15]，[16]を参照されたい．

$n>3$ に対して凸依存性を仮定するときには，評価の階層構造を考慮して[4]，[17]一度に取り扱う属性の数を減らす必要がある．今後，数式処理技術[18]が発展すれば，$n>3$ の場合の処理も可能となるであろう．

3. 期待効用理論に対する反例

ここでは，von Neumann-Morgenstern の期待効用理論に対する種々の反例を挙げることにより，期待効用理論が人間行動の記述的モデルとしては不適切であることを示す．

3.1 Allaisの反例（確実性の効果）[19]

DMに次の代替案（2.1に定義したくじ）l_1 と l_2 のどちらを選択するかを尋ね，さらに代替案 l_3 と l_4 のどちらを選択するかを尋ねると，ほとんどの場合

$$l_1=(10M;1) \succ l_2=(50M, 10M, 0; 0.1, 0.89, 0.01)$$

$$l_3=(50M, 0; 0.1, 0.9) \succ l_4=(10M, 0; 0.11, 0.89) \quad (7)$$

という選好関係を示す．ただし，$1M=$「1万円を得ること」を表わす．期待効用理論によると，(7)式から

$$u(10M)>0.1u(50M)+0.89u(10M)+0.01u(0) \quad (8a)$$

$$0.1u(50M)+0.9u(0)>0.11u(10M)+0.89u(0) \quad (8b)$$

を得るが(8a)と(8b)式は矛盾している．この例は，期待効用モデルに対するAllaisの反例[20]と呼ばれている．

これは，一般にDMが100%確実である代替案（l_1）を過大評価するために起こる現象で，このような効果を確実性の効果[8]（certainty effect）という．

3.2 希求水準の効果[21]

DMがリスク下で代替案選択を行なうさいに，過去の経験・情報や現状と照らし合わせて，得られる結果を評価しようとする．そのさいに，DMの中立レベル（status quo）を希求水準（aspiration level）と呼ぶと，希求水準より高い結果を利得，逆に低い結果を損失として感じる．Kahneman-Tversky[8]は，結果の空間 X を利得領域（Gain Domain, GD）と損失領域（Loss Domain, LD）に分け，DMが一般にGDにおいてはリスク回避の傾向を示して安全性の高い確実な案を選好するのに対し

て，ＬＤにおいてはリスク志向の傾向を示して損失の度合いがあまり大きくない範囲で損失の小さくなる可能性の高い案を選好すると指摘している．このような効果を希求水準の効果（aspiration level effect）という．

3.1 ではＧＤにおける代替案選択の例を示したが，次にＬＤにおける代替案選択を考える．DMに次の代替案 l_1 と l_2 のどちらを選択するかを尋ね，さらに代替案 l_3 と l_4 のどちらを選択するかを尋ねるとほとんどの場合

$l_1=(-4M,0;0.8,0.2)\succ l_2=(-3M;1)$

$l_3=(-3M,0;0.25,0.75)\succ l_4=(-4M,0;0.2,0.8)$

という選好関係を示す．これも期待効用理論では説明できない現象である．

3.3 慣性の効果[8]

質問１：$l=(10M,-10M;0.5,0.5)$

というくじが只ならば，このくじを入手しますか？

質問２：くじ l をすでに所持しているとき，このくじを只で他人に譲りますか？

という質問をDMにすると，質問１に対しては「くじ l を入手しない」と答え，質問２に対しては「くじ l を他人に譲らない」と答える人が多い．これは，現状をできるだけ維持したいという選好からきており，慣性の効果（inertia effect）と呼ばれている．この現象も期待効用理論では説明できない．

3.4 文脈の効果[5]

DMがくじ

$l_1=(-10M,0;0.01,0.99)$

に直面している（確率0.01で10万円の損害をうける）とき，DMに

質問１：くじ l_1 を回避するために1,000円の保険をかけますか？

質問２：くじ l_1 とくじ $l_2=(-1,000;1)$のいずれを選択しますか？

と尋ねると，質問１に対しては「保険をかける」と答え，質問２に対しては「l_1 を選ぶ」と答える人が多い．よく見ると質問１と２の内容は同じものであるが，質問の文脈が異なっている．

一般に，ギャンブルの文脈で質問するよりも，保険の文脈で質問するほうが，DMはリスク回避型の選択をすると言われている[5],[19].保険会社がよく儲るのはこのためであろうか？　このように，質問の文脈によって選択が変わる現象を，文脈の効果（context effect）という．これも期待効用理論では説明できない現象である．

3.5 Ellsburgの反例[7],[19]

袋の中に赤玉が10個，黒玉と白玉が合わせて20個，計30個のボールが入っている．袋の中からボールを１個取り出すものとして，次の４つの事象を考える．

a：赤玉なら賞金１万円が貰える．

b：黒玉なら賞金１万円が貰える．

c：赤玉または白玉ならば賞金１万円が貰える．

d：黒玉または白玉ならば賞金１万円が貰える．

多くのDMは

$$a\succ b,\quad d\succ c \tag{9}$$

という選好を示す．袋の中からボールを１個取り出してそれが赤玉である確率は 1/3 である．黒玉である確率を p_b，白玉である確率を p_w とすると

$$p_b+p_w=2/3$$

を満たす．期待効用理論によると

$$a\succ b\Rightarrow 1/3u(1M)>p_b\,u(1M)\Rightarrow p_b<1/3 \tag{10a}$$

$$d\succ c\Rightarrow 2/3u(1M)>1/3u(1M)+p_w\,u(1M)$$
$$\Rightarrow p_w<1/3\Rightarrow p_b>1/3 \tag{10b}$$

を満たさなければならないが，(10a)，(10b)式は矛盾しており，(9) 式の選好を期待効用理論によって説明することはできない．この例は Ellsburg の反例と呼ばれている．これは，DMが，確率の値が未知のあいまいな代替案よりも確率の値が明確にわかっている代替案の方を好むことを示しており sure-thing principle [22] と呼ばれている．

4. 期待効用理論を一般化した記述的モデル

4.1 期待効用モデルの変形

2. に議論したように，von Neumann-Morgenstern の期待効用モデル（以下NMモデルと略す）によると，DMは(１)式に示した期待効用を最大化する代替案を選択する．Schoemaker[7]は，このNMモデルを少し一般化して，DMは

$$\max_{a\in A}\sum_i F(p_i)\,U(x_i) \tag{11}$$

という規範にしたがって代替案を選択するとし，$F(\cdot)$，$U(\cdot)$に種々の形を考慮して，いくつかのモデルを説明している．ここで，$F(p_i)$は客観確率 p_i の関数，効用関数 $U(x_i)$ は x_i そのものまたはリスク下の効用関数 $u(x_i)$ または確実下の価値関数 $v(x_i)$を表わす．**表１**に Schoemaker[7]が議論している．９つの期待効用モデルの変形を示す．

表１の中の1,2,3は(11)式が $\sum p_iU(x_i)$の形をとっているので期待効用モデルのカテゴリーに入る．4,5,6 は

表 1　期待効用モデルの変形[7]

1	$\sum p_i x_i$	期待結果
2	$\sum p_i v(x_i)$	ベルヌーイの期待価値
3	$\sum p_i u(x_i)$	von Neumann-Morgenstern の期待効用
4	$\sum f(p_i) x_i$	確実同値理論
5	$\sum f(p_i) v(x_i)$	主観的期待価値
6	$\sum f(p_i) u(x_i)$	主観的期待効用
7	$\sum w(p_i) x_i$	重みつき結果
8	$\sum w(p_i) v(x_i)$	Prospect 理論(主観的重みつき価値)
9	$\sum w(p_i) u(x_i)$	主観的重みつき効用

$v(x)$: 確実下の価値関数，$u(x)$: リスク下の効用関数
$f(p)$: 主観確率，$w(p)$: 確率に対する主観的重み関数

(11)式が$\sum f(p_i) U(x_i)$の形をとり，しかも，$\sum f(p_i)=1$を満たす主観確率$f(p_i)$を用いているので，主観的期待効用(Subjective Expective Utility, SEU)モデルのカテゴリーに入る．さらに，7,8,9 は (11) 式が $\sum w(p_i) U(x_i)$ の形をとり，$\sum w(p_i)=1$ は必ずしも満たさないので，$w(p_i)$を客観確率に対する主観的な重みと考えて，主観的重みつき効用(Subjectively Weighted Utility, SWU)モデルのカテゴリーに入れる．

Handa[25]のモデル（表1の4）は，NMモデルとよく似た公理系のもとで，主観確率$f(p_i)$と，結果x_iに関する線形効用関数を用いて確実同値理論を展開している．そしてこのモデルによって Allais の反例が容易に説明できることを示している．

Kahneman-Tversky［8］の Prospect 理論（以下KTモデルと略す）もSWUモデルのカテゴリーに属するが，確実性の効果，希求水準の効果，遊離効果(isolation effect)［8］などの，経験的に知られているDMの選好構造を適切に説明することを目的として作られた記述的モデルである．ここで，遊離効果とは，DMが複数の代替案を比べるときに，その中に含まれる共通の要素は遊離させて考えるという現象を意味している．

KTモデルはNMモデルと比べて次のような特徴を備えている[19].

1) KTモデルに現われる価値関数$v(x)$は，正の比例変換に対して選好順序を保持する．この$v(x)$によってDMのリスクに対する態度を測定することはできないが，確実下における価値を測定することができる．
2) $v(x)$は利得領域（GD）において凹形，損失領域(LD)において凸形を示し，LDにおける勾配の方がGDにおける勾配よりも大きい．
3) 確率に対する重み関数$w(x)$は，確率の比較的低い値を重く扱い($w(p)>p$)，比較的高い値を軽く扱う($w(p)<p$)．
4) 代替案の評価を行なう前に，次のような編集(editing) を行なう．
 (a) 希求水準を基準にして結果を表現する．
 (b) 希求水準以上の結果のみを比較したり，希求水準以下の結果のみを比較するときには，各代替案から共通の利得あるいは損失を取り除く．
 (c) 等しい結果を持った確率をたしあわせる．

この結果，KTモデルによって，Allais の反例，希求水準の効果，遊離効果などを適切に説明することができる．

4.2　リスク下の価値関数[24]

Aをリスク下の代替案の集合として，代替案をくじ

$$l=(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n)\in A \qquad (12)$$

で表わす．A^*を$A\times A$の部分集合とし，$\gtrsim$と$\gtrsim^*$をおのおのA上およびA^*上の2項関係とする．ここで，$\gtrsim$はA上の選好関係を表わし，$\gtrsim^*$は，A^*上の選好関係を表わす．そして，$l_1 l_2 \gtrsim^* l_3 l_4$ $(l_1,l_2,l_3,l_4\in A)$ は「l_2に対するl_1の選好強さは，l_4に対するl_3の選好強さよりも大きいか等しい」ことを意味する．$(A, A^*, \gtrsim^*)$ は正選好差構造[22]をとると仮定すると，任意の$l_1,l_2,l_3,l_4\in A$ $(l_1\gtrsim l_2, l_3\gtrsim l_4)$に対して

$$l_1 l_2 \gtrsim^* l_3 l_4 \Leftrightarrow$$
$$F(l_1)-F(l_2)\geqq F(l_3)-F(l_4) \qquad (13)$$

を満たすA上の実数値関数Fが存在する．$l_1,l_2,l_3\in A$に対して

$$l_1 l_3 \gtrsim^* l_2 l_3 \Leftrightarrow l_1 \gtrsim l_2 \qquad (14)$$

と定義すると

$$l_1 \gtrsim l_2 \Leftrightarrow F(l_1)\geqq F(l_2) \qquad (15)$$

を得るので，FはA上の選好関係をも表わしている．さらに，(13)式を満たすFは正線形変換の範囲で一意であるので，Fは基数的価値関数を表わす．

DMは，リスク下の代替案選択を

$$\max_{l\in A} F(l)=\max_{l\in A}\sum_i f(x_i,p_i) \qquad (16)$$

の規範にしたがって行なうものとする．ここで，$f(x,p)$は確率pで得られる結果xの価値(選好強さ)を表わし，これをリスク下の価値関数と呼ぶ．

$f(x,p)$の具体的表現を求めるために

$$w(p|x)\triangleq f(x,p)/f(x,1) \qquad (17a)$$
$$v(x)\triangleq v(x|1) \qquad (17b)$$
$$v(x|p)\triangleq f(x,p)/f(x^*,p) \qquad (17c)$$

と定義すると，$f(x,p)$は

$$f(x,p)=w(p|x)v(x) \tag{18}$$

と表わされる．ただし，x^*は最良の結果を表わす．$w(x|p)$は確率に対する重み関数を表わし，これが結果のレベルにも依存することがKTモデルとの大きな相違点である．現実にそのような現象が観察されている[25]．$v(x)$は確実下の基数的価値関数[26]を表わしている．したがって，$w(p|x)=w(p)$ を満たすときには(16)，(18)式はKTモデルを表わし，$p=1$ のときには (16)，(18) 式はDyer-Sarin[26]の基数的価値関数のモデルを表わす．

重み関数の一例として

$$w(p|x)=\begin{cases}2\delta\, p^{a(x)}/[p^{a(x)}+(1-p)^{a(x)}], & p<1\\ 1, & p=1\end{cases} \tag{19}$$

を用いると，確率優位の性質[4]（好ましい結果の起こる確率の大きい代替案が好まれるという性質）を満たす．

リスク下の価値関数のモデルを用いると，Allaisの反例や希求水準の効果はもとより，同一のDMが保険に加入し，しかもギャンブルに参加する (insurance and gambling) という現象[5]も適切に説明することができる[24]．

4.3 その他のモデル

NMモデルに対する種々の反例を説明する記述的モデルとして興味深いものに，上記のモデルの他に Bell の Regretモデル[27]，[28]と Disappointmentモデル[29]がある．

Regretモデルというのは，リスク下において複数の代替案選択をせまられて，ある代替案を選択したときに，別の代替案を選択しておけば良かったと後で後悔することを避ける行動 (regret aversion) をモデル化したものである．2つの代替案

$$l_1=(x_1,x_2;\ p,1-p)$$
$$l_2=(x_3,x_4;\ p,1-p)$$

があって，$l_1 \succ l_2$ とする．$u(x)$をNM効用関数とすると，NMモデルでは

$$pu(x_1)+(1-p)u(x_2)>pu(x_3)+(1-p)u(x_4) \tag{20}$$

を満たす．これに対して，ある代替案を選択したことによって得られた資産 (final asset) xと，もし他の代替案を選択しておれば得られた資産 (foregone final asset) yとの2属性効用関数を$u(x,y)$とすると Regretモデルでは，$l_1 \succ l_2$のとき

$$pu(x_1,x_3)+(1-p)u(x_2,x_4)>pu(x_3,x_1)+(1-p)u(x_4,x_2) \tag{21}$$

を満たす．さらに，確実下の基数的価値関数を $v(x)$ としたときに，$u(x,y)$は，ある関数にf対して

$$u(x,y)=v(x)+f(v(x)-v(y)) \tag{22}$$

で表わされるとしている．ここで，$v(x)$は得られた資産xに対する満足度を表わし，$v(x)-v(y)$は後悔(regret)の度合いを表わし，fは両者のトレードオフを表わしている．

このようなモデルを用いて，あるDMが保険に加入すると同時にギャンブルを楽しむ現象や，KTモデルによって説明された種々の効果を適切に説明している．

Disappointmentモデルは，リスク下で代替案を選択したときに，事前の期待 (prior expectation) に比較して実際に得られた結果が劣っている場合に失意 (disappointment) を，勝っている場合に得意 (elation) をモデル化するものである．DMの心理的満足度をモデル化したものとして興味深い．

5. むすび——今後の課題——

これまで効用理論とその応用は，意思決定分析のための規範的モデルとしての議論がその大半を占めていた．しかし，今後はこれに加えて

1) 記述的モデルとしての側面
2) 予見的モデルとしての側面
3) 公理的モデルとしての側面

に関する議論を合わせて行なう必要がある．本講では，特に1)について詳しく述べた．3)については，NM効用理論における公理を拡張して一般化した公理系のもとで，非線形効用理論[30]−[32]が議論されている．今後，これら公理的モデルの，記述的モデルとしての側面を議論し，実際的にもつ意味とその妥当性を明らかにしていく必要がある．

本講ではふれることができなかったが，リスク下の効用関数 $u(x)$と確実下の価値関数$v(x)$ の間の関係が相対的リスクに対する態度 (relative risk attitude) として議論されている[33]．NM効用理論におけるリスクに対する態度は，真のリスクに対する態度と選好強さとが混じり合ったものを表わしている[7]．今後，真のリスクに対する態度と選好強さとを分離して測定することや，両者の間の関係を明らかにすることにより，DMの心理的満足度と価値に対する満足度とを精度よく記述して，その行動を分析することも興味深い課題であると思われる．

実システムへの応用として，生産における意思決定を考えるとき，最近の消費者の価値観とニーズの多様化に応えることは重要な課題の1つであり，多品種少量生産を実現するためのFMSが各分野で実用化されつつある．そのための消費者行動のモデル化，生産計画・運用

システムの評価と意思決定のモデル化に対して，知識工学によるアプローチと併用した効用理論によるアプローチが主要な役割を果すものと期待される[34].

わが国においては，欧米に比べて環境保護重視形の「公共的リスクの評価と管理」に関する研究が遅れている．ここでは一般大衆がDMと考えられるが，DMのリスクに対する態度との関連で，公共的リスクの問題を議論することも今後の重要課題として挙げられよう．

参考文献

[1] R.D. Luce & H. Raiffa: Games and Decisions, John-Wiley, 1957

[2] 市川信惇：意思決定論，共立出版，1983

[3] J.von Neumann & O.Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton Univ. Press, 1944

[4] R.L. Keeney & H. Raiffa: Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs, John-Wiley, 1976

[5] J.C. Hershey, H.C. Kunreuther & P.J.H. Schoemaker: Sources of Bias in Assessment Procedures for Utility Functions, Mgmt. Sci., Vol.28, No. 8, pp.936-954, 1982

[6] P.H.Farquhar:Utility Assessment Methods, Mgmt. Sci., Vol.30, No.11, pp.1283-1300, 1984

[7] P.J.H. Schoemaker: The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations, J. Econ. Literature, Vol. XX, pp. 529-563, 1982

[8] D. Kahneman & A. Tversky: Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica, Vol.47, No. 2, pp.263-291, 1979

[9] B.P. Stigum & F. Wenstop, ed.: Foundations of Utility and Risk Theory with Applications, D. Reidel, 1983

[10] K.J. Arrow:Essays in the Theory of Risk-Bearing, North-Holland, 1970

[11] P.C. Fishburn: Independence in Utility Theory with Whole Product Sets, Opns. Res., Vol.13, No. 1, pp.28-45, 1965

[12] H. Tamura and Y. Nakamura: Decompositions of Multiattribute Utility Functions on Convex Dependence, Opns. Res., Vol.31, No. 3, pp.488-506, 1983

[13] P.C. Fishburn: von Neumann-Morgenstern Utility Functions, Opns. Res., Vol.22, No. 1, pp.35-45, 1974

[14] D.E. Bell:Multiattribute Utility Functions: Decompositions Using Interpolation, Mgmt. Sci. Vol.25, pp.744-753, 1979

[15] 田村・行村：凸依存性による2属性効用関数同定の対話形アルゴリズム；システムと制御，26巻，12号 pp.775-782, 1983

[16] 田村編：大規模システム，第7章，昭晃堂，1986

[17] F. Seo and M. Sakawa: Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning, D. Reidel, 1988

[18] 佐々木・元吉・渡辺：数式処理システム，昭晃堂 1986

[19] P.J.H. Schoemaker: Experiments on Decisions under Risk:The Expected Utility Hypothesis, Kluwer-Nijhoff Publishing, 1980

[20] M. Allais & O. Hagen: Expected Utility Hypothesis and the Allais Paradox, D. Reidel, 1979

[21] J.W. Payne, D.J. Laughhunn & R. Crum: Translation of Gambles and Aspiration Level Effects in Risky Choice Behavior, Mgmt.Sci., Vol.26, No.10, pp.1039-1060, 1980

[22] D. H. Kranz, R.D. Luce, P. Suppes & A. Tversky: Foundations of Measurement, Academic Press, 1971

[23] J. Handa: Risk, Probabilities, and a New Theory of Cardinal Utility, J. Polit. Econ., Vol.85, No. 1, pp.96-122, 1977

[24] 田村・森・中村：不確実性を考慮した価値関数による選好のモデル化，計測自動制御学会論文集，23巻 1号，pp.54-59, 1987

[25] J. Quiggin: A Theory of Anticipated Utility, J. Econ. Behav. & Organ., Vol. 3, pp.323-343, 1982

[26] J.S. Dyer & R. K. Sarin: Measurable Multiattribute Value Function, Opns. Res., Vol.27, No. 4, pp.810-822, 1979

[27] D.E. Bell: Regret in Decision Making under Uncertainty, Opns. Res., Vol.30, No. 5, pp.961-981, 1982

[28] D.E. Bell: Risk Premium for Decision Regret, Mgmt. Sci., Vol.29, No.10, pp.1156-1166, 1983

[29] D.E. Bell: Disappointment in Decision Making under Uncertainty, Opns. Res., Vol. 33, No. 1, pp.1-27, 1985

[30] P.C. Fishburn: Nontransitive Measurable Utility, J. Math. Psychol., Vol.26, pp.31-67, 1982

[31] D. E. Bell & P. H. Farquhar: Perspectives on Utility Theory, Opns. Res., Vol.34, No. 1, pp.179-183, 1986

[32] I. H. LaValle & P.C. Fishburn: Decision Analysis under States-Additive SSB Preferences, Opns. Res., Vol.35, No. 5, pp.722-735, 1987

[33] J.S. Dyer & R. K. Sarin: Relative Risk Aversion, Mgmt. Sci., Vol.28, No. 8, pp.875-886, 1982

[34] 田村：フレキシブル生産の意思決定—ORとAIによるアプローチ—，第6回知識工学シンポジウム資料，pp. 特5-12, 1987