論文・研究レポート

石垣の曲線

——様式の数理——

柳井　浩

1. はじめに

日本の石垣，特に城郭の石垣は，美しい曲線をもつことで知られている．本稿は，古文書による作図法にもとづいて,この曲線の数式による表現を与えるものである．

城の石垣にこのような曲線が用いられるようになったのは，城が実戦に用いられた戦国時代ではなく，江戸時代に入ってからのことである．実際，城がいわゆる高石垣（高さ12間≒22m以上の石垣）を志向し始めたのは文禄・慶長期(1592-1615)であり，隅角稜線部の曲線石垣が様式的に完成するのは元和・寛永期(1615-1644)に至ってのことだと言う［1］．

それでは，このような曲線が石垣に選ばれたその狙いは何か？というと，現代の多くの人は力学的安定性を推察する．たしかに，地震が多く，多湿なわが国において凸曲線を選ぶことは，強力な接合材なしに作る石垣の形として合理的なことであろうが，実際に石垣を設計し工事にあたった人達が，そのことをどれだけ意識していたのかということになると，あまり定かではない．古文書(後藤家文書)では城郭の使用可能面積を増大すると同時に，“陰陽の和合”を成立させるためとされているということだが[1]，前者はその有効性が疑わしいし，後者は現代の我々には難解である．

意識していなくても，経験的には最適な形に落ち着いたのだとして，近代土木力学的合理性の見地から目的関数を定め，変分法的操作によってこの様式の曲線を与える数式を導こうとすることは，今後の課題としては興味深いが，差し当っては，いささか性急にすぎると筆者は考える．むしろ，当時の作図法に忠実な数式化が先決問題であろう．

ところで，江戸時代に技師としてこのような石垣の構築に従事していたのは穴太衆（あのうしゅう）と呼ばれる人達である．近江国穴太（大津市坂本）にはすでに中世末期から近世初頭にかけて石材の加工や石積の技能者がおり，戦国の武将織田信長が安土城を築いた際，召し出されて石積に従事したことが知られている[2]．その後，各地の築城に際して，石積が必要になるにつれ，その技能をかわれ，あるいは臨時に，あるいは藩士として召し抱えられる者がでてきた．そして，この人達が一般に，「穴太」あるいは「穴太役」と呼ばれるようになったのである．

このような「穴太」の手になる，あるいは「穴太」からの聞き書きとして成立した古文書には石垣の曲線の作図法が示されているものがある．喜内　敏氏［7］および北垣聰一郎氏［1］によるそれらの解説をもとに，本稿では，石垣の曲線の2つの作図法について現代的見地からみた数理的側面を調べてみようと思う．

2つの作図法は発想法においても異なり，また，出来上がる曲線も異なる．しかし，いずれも石垣の形を折れ線によって構成するものである．本稿では，この折れ線の極限としての連続微分可能な曲線を求めてみる．

折れ線をただ近似するだけならば，その方法は無数にあるし，また精度をあげることも可能である．しかし，これでは，設計者が頭の中に描いていたであろうものを推察することにはならない．そこで，極力作図の発想にしたがって，極限となる曲線を求めるわけである．

なお，実際の石垣構築に際しては，石垣の最上部に「雨落とし」という垂直部分を設けるなど，ヴァリエーションがあるのだが，本稿では主要な曲線部分の作図法だけに着目したことをおことわりしておく．

2. 後藤家文書（もんじょ）の作図とその曲線

後藤家は加賀前田藩の穴太の家である．この家には数多くの石積に関する文書が伝わっている．このうち，主として「新積地形准縄秘伝抄絵図（しんづみちぎょうみずなわ）」および「唯子一人伝」にもとづく石垣の輪郭の作図法が喜内氏および北垣氏によって紹介されている．作図法は当時の土木工事法，石

（受付 63.1.25　受理 63.3.8）
やない　ひろし　慶応義塾大学　理工学部
〒223 横浜市港北区日吉3—14—1

垣の規模に対応する石材の大きさの経験的な決め方，経験的な数値をもとに，未発達な数学をもちいて行なうものであり，原理的に難しくはないが，大変こみいっている．

詳細は，文献[1]，[7]を参照していただくことにして，ここでは，図1のような基本直角3角形ABCおよび点Dが与えられた所から話を始めよう．

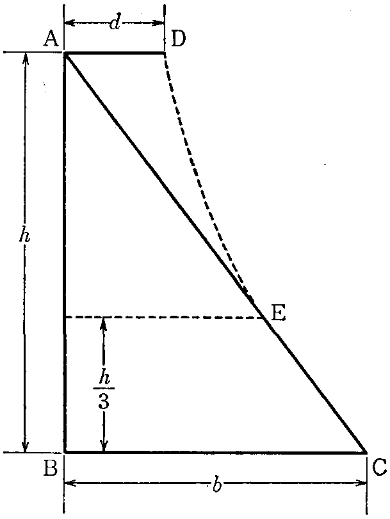

図 1　基本三角形

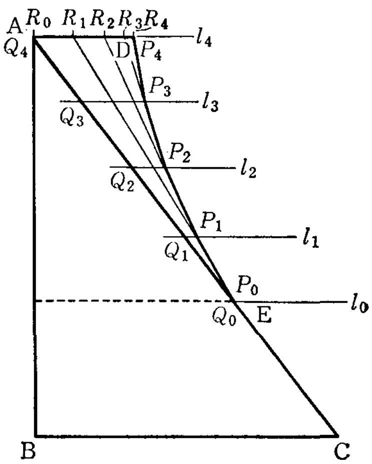

図 2　後藤家文書の作図法

ABおよびBCは鉛直および水平線であり，点Dは頂点Aと水平で点Aからdの距離にある．石垣の輪郭は点Cから点Dにいたる折れ線として構成されるが，下部1/3は「矩方（のりかた）」と呼ばれる斜辺ACの部分CEをそのまま用い，上部2/3についてこれから述べるようなやり方で折れ線を描くのである．この3角形の実際の大きさは，石垣の規模に対応するものであるが，「新積地形准縄秘伝抄絵図」にあらわれる数値例の1つは次のようなものである．

$$h=\mathrm{AB}=10\text{丈}\fallingdotseq 30.3\,\mathrm{m}\ \text{(本高さ)} \tag{1}$$

$$b=\mathrm{BC}=5.9623\text{丈}\fallingdotseq 18.1\,\mathrm{m} \tag{2}$$

$$d=\mathrm{AD}=1.429\text{丈}\fallingdotseq 4.33\,\mathrm{m}\ \text{(惣規合)} \tag{3}$$

さて，点Eから点Dに至る折れ線の作図法を述べよう．まず，線分AEをn等分する点を$Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$とし，これらを通る水平線を$l_0, l_1, \cdots, l_n$とする．ここで，nを大きくするほど，作図は細かく出来上がる．したがって，nは石垣の高さに応じて選ばれるべき作図上のパラメターである．「唯子一人伝」にあらわれる数値の一例は

$$n=14 \tag{4}$$

であり，この場合の作図を「十四返し」と呼んでいる．

次に，線AD分上に次のような$n+1$個の点$R_i\ (i=0, 1, \cdots, n)$をとる．

$$R_0=A \tag{5}$$

$$R_1:\overline{R_0R_1}=\frac{2d}{n+1} \tag{6}$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$R_{i+1}:\overline{R_iR_{i+1}}=\overline{R_{i-1}R_i}-\frac{2d}{n(n+1)} \tag{7}$$

このようにすれば，点の間隔は等差数列をなし，

$$\overline{R_0R_i}=\left(2-\frac{i+1}{n+1}\right)\frac{di}{n} \tag{8}$$

となる．特に，

$$\overline{R_0R_n}=d \tag{9}$$

つまり，n番目の点はDに一致する．

$$R_n=\mathrm{D} \tag{10}$$

図2には簡単のため，$n=4$の場合が示されている．そこで，折れ線の構成にとりかかろう．

$$P_0=Q_0 \tag{11}$$

とし，それに引き続く$P_i\ (i=1, 2, \cdots, n-1)$は，

$$P_i:\text{直線 } P_{i-1}R_i \text{ と } l_i \text{ の交点} \tag{12}$$

および

$$P_n=R_n \tag{13}$$

と定める．こうして作られる点列

$$\{P_0, P_1, \cdots, P_n\} \tag{14}$$

を結ぶ折れ線がすなわち石垣の輪郭を与えるのである．

以上が古文書にある作図手順を現代数学の言葉に翻訳して述べたものであるが，次にパラメターnを大きくしていったときに，折れ線が極限としてどのような曲線に近づくのかを計算してみよう．そのため，図3のような座標軸を設定しよう．すなわち水平方向にy軸，鉛直方向にx軸をとる．通常のとりかたのものを時計方向に90°回転したものであるが，これは結果として得られる式を見やすい形にしたいためである．また，一般性を失うことなく，

$$2h/3=1 \tag{15}$$

として議論をすすめる．これは，途中の計算をわかりやすくするためで，結果がでた段階でもとにもどすことにしよう．

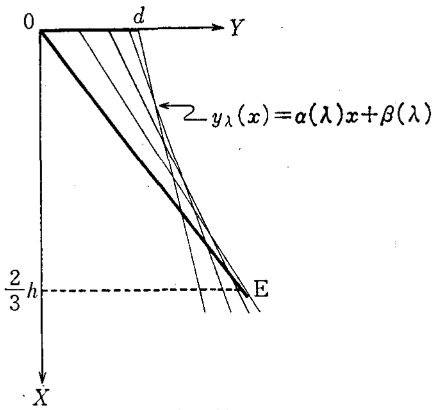

図 3 座標軸のとり方 1

さて，上述の作図手順においては，次々に直線を引きその上の点を始点として次の直線をひいた．だから，結果として出来る折れ線は，n 本の直線からなる直線群の隣り合う直線の交点をつないで作られたものとみることができる．そこで $n\to\infty$ とすれば，この折れ線は，無限本の直線からなる直線群の包曲線(包絡線)になる．

この包曲線を求めるために，上述の作図における第 i 番目の直線を

$$y_{i/n}=\alpha\left(\frac{i}{n}\right)x+\beta\left(\frac{i}{n}\right) \tag{16}$$

とかく．そして，$n\to\infty$ のとき

$$\lambda=\lim\frac{i}{n} \tag{17}$$

として連続化しよう．このような連続化によって，パラメーター λ の定義域 $[0,1]$ 上で定義される直線群

$$y_\lambda(x)=\alpha(\lambda)x+\beta(\lambda),\quad \lambda\in[0,1] \tag{18}$$

を考えよう．ここで，$\alpha(\lambda)$ および $\beta(\lambda)$ は $\alpha\left(\frac{i}{n}\right)$ および $\beta\left(\frac{i}{n}\right)$ の極限として定義されるが，次にその具体的な形を定めよう．

まず，$\beta\left(\frac{i}{n}\right)$ は直線の切片であり，上述の作図における点 R_i であるが，その y 座標は (8) 式で与えられている．よって，この (8) 式と (17) 式から

$$\beta(\lambda)=d\lambda(2-\lambda) \tag{19}$$

となる．

一方，$\alpha(\lambda)$ は直線の勾配であるが，これについては次のようにして $\alpha(\lambda)$ に関する微分方程式を立てることができる．上述の作図法によれば，直線 $y_{(i+1)/n}(x)$ は直線 $y_{i/n}(x)$ 上の点 P_i：

$$x=1-\frac{i}{n},\quad y=\alpha\left(\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{i}{n}\right)+\beta\left(\frac{i}{n}\right) \tag{20}$$

と点 R_{i+1}：

$$x=0,\quad y=\beta\left(\frac{i+1}{n}\right) \tag{21}$$

を通る直線であるから，その勾配 $\alpha\left(\frac{i}{n}\right)$ は

$$\alpha\left(\frac{i+1}{n}\right)=\frac{\alpha\left(\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{i}{n}\right)+\beta\left(\frac{i}{n}\right)-\beta\left(\frac{i+1}{n}\right)}{1-\frac{i}{n}} \tag{22}$$

となる．そこで，

$$\lambda=\frac{i}{n},\quad \triangle\lambda=\frac{1}{n} \tag{23}$$

とおけば，

$$\alpha(\lambda+\triangle\lambda)=\frac{\alpha(\lambda)(1-\lambda)+\beta(\lambda)-\beta(\lambda+\triangle\lambda)}{1-\lambda} \tag{24}$$

となる．さらに，

$$\alpha(\lambda+\triangle\lambda)\cong\alpha(\lambda)+\alpha'(\lambda)\triangle\lambda \tag{25}$$

$$\beta(\lambda+\triangle\lambda)\cong\beta(\lambda)+\beta'(\lambda)\triangle\lambda \tag{26}$$

を (24) 式に代入すれば，

$$\alpha(\lambda)+\alpha'(\lambda)\triangle\lambda=\alpha(\lambda)-\frac{\beta'(\lambda)\triangle\lambda}{1-\lambda} \tag{27}$$

を得る．さらに，極限移行 $\triangle\lambda\to 0$ を行なえば，

$$\alpha'(\lambda)=\frac{-\beta'(\lambda)}{1-\lambda} \tag{28}$$

を得る．一方，(19) 式から，

$$\beta'(\lambda)=2d(1-\lambda) \tag{29}$$

が得られるから，これを (27) 式に代入すれば，

$$\alpha'(\lambda)=-2d \tag{30}$$

という $\alpha(\lambda)$ に関する微分方程式がえられる．

$n\to\infty$ のとき，$R_1\to R_0$ であることに注意すれば，この微分方程式において，$\alpha(0)$ は点 E における勾配となるから，

$$\alpha(0)=2b/3. \tag{31}$$

したがって，

$$\alpha(\lambda)=2b/3-2d\lambda \tag{32}$$

となる．

こうして，直線群 (18) の具体的な形が

$$y_\lambda(x)=(2b/3-2d\lambda)x+d\lambda(2-\lambda) \tag{33}$$

であることがわかった．

このような直線群かららその包曲線を求めるには，(33) 式と，この式のパラメーター λ に関する偏導関数をゼロとおいた式

$$0=-2dx+2d(1-\lambda) \tag{34}$$

を連立させて λ を消去すればよい．すなわち，(34) 式から，

$$\lambda=1-x \tag{35}$$

が得られるから，これを (33) 式に代入すれば，包曲線として，

$$y=2bx/3+d(1-x)^2 \tag{36}$$

を得る．さらに，(15) 式における石垣の高さの正規化を

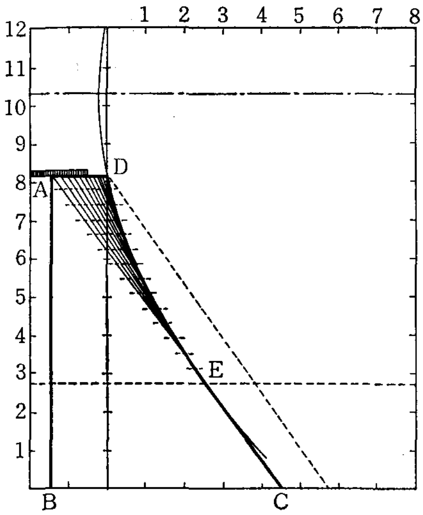

図 4　後藤家文書による折れ線と極限の曲線

一般化するために，

$$x=3u/2h \tag{37}$$

としてこれを(36)式に代入すれば，石垣の曲線として

$$y=bu/h+d(1-3u/2h)^2 \tag{38}$$

を得る．ここに，uは天端から計った高さである．

すなわち，後藤家文書による石垣の曲線は，水平な軸をもつ放物線に近づく，**図 4** に古文書による諸元をもとに十四返しを計算機で計算・作図したものを示し，これに(38)式の曲線を重ねた．ほとんど完全に一致していることが見られる．

3.　「石垣秘伝之書」の作図法とその曲線

「石垣秘伝之書」は中西善助という人物が寛保3年(1743)，熊本細川藩の穴太　北川作兵衛家から聞き取ったものとされており，このうち，石垣の輪郭の作図法は「ノリ・ソリ割方之事」および「打出大ガ子の事」という項に記されている．

この作図法の場合にも記述の詳細については文献[1]を参照していただくことにして，ここでは**図 5** のような基本直角３角形ＡＢＣおよび点Ｄが与えられた所から話を始めよう．「石垣秘伝之書」にあらわれる数値例の１つは次のようなものである．

h ＝ＡＢ＝10間≒18.18m

b ＝ＢＣ＝５間≒9.09m

d ＝ＡＤ＝0.6間≒1.09m

この文書による折れ線の作図は三角形の頂点Ａから下部Ｃ点にわたるものである．まず，辺ＡＢをn等分する点を上から，$Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$とし，これらを通る水平線を

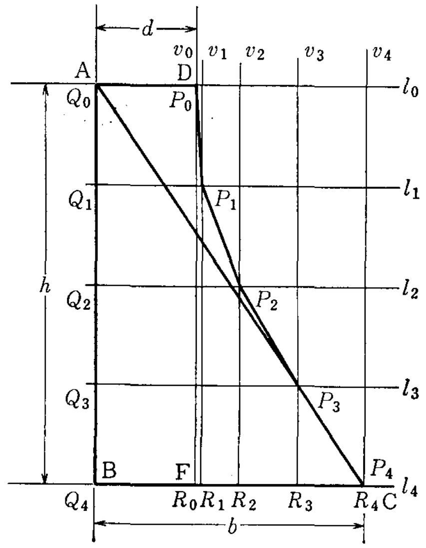

図 5　「石垣秘伝之書」の作図法

それぞれ$l_0, l_1, \cdots, l_n$とする．nは作図上のパラメターであり，細かく仕上げたければ大きくとればよい．上述の数値例に対応する「石垣秘伝之書」の数値例は

$$n=10 \tag{39}$$

である．

次に，点Ｄから底辺ＢＣに下ろした垂直の足をＦとして，線分ＦＣ上に次のような$n+1$個の点 $R_i(i=0, 1, \cdots, n)$をとる．（図５参照．図５には$n=4$の場合が示されている．）

$$R_0=\mathrm{F} \tag{40}$$

$$R_1 : \overline{R_0R_1}=\frac{r_0h}{n} \tag{41}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$R_{i+1} : \overline{R_iR_{i+1}}=\frac{r_ih}{n} \tag{42}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$R_n : \overline{R_{n-1}R_n}=\frac{r_{n-1}h}{n} \tag{43}$$

ここに，r_i は

$$r_i=(s(i)-s(n-1))\delta+\frac{b}{h}, \tag{44}$$

$$\delta=\frac{nd}{(n-1)h} \tag{45}$$

$$s(i)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i},\quad i\geqq 1 \tag{46}$$

$$s(0)=0$$

によって与えられる．

したがって，(44)式からわかるように，

$$r_i=r_{i-1}+\frac{\delta}{i} \tag{47}$$

が成立する．つまり，r_iは調和数列の和として構成され

ている．また，このような定義によれば，

$$\overline{R_0R_n}=\overline{R_0R_1}+\overline{R_1R_2}+\cdots+\overline{R_{n-1}R_n}$$
$$=(r_0+r_1+\cdots+r_{n-1})\frac{h}{n} \qquad (48)$$

であるが，(44)，(45)式と

$$\sum_{i=1}^{n-1}s(i)=ns(n-1)-(n-1) \qquad n\geqq 1 \qquad (49)$$

という関係をつかえば，

$$\overline{R_0R_n}=\left\{\delta\sum_{i=0}^{n-1}s(i)-n\delta s(n-1)+\frac{bn}{h}\right\}\frac{h}{n}$$
$$=\left\{n\delta s(n-1)-(n-1)\delta-n\delta s(n-1)+\frac{bn}{h}\right\}\frac{h}{n}$$
$$=b-(n-1)\delta$$
$$=b-d \qquad (50)$$

つまり，点 R_n は点Cに一致する．

$$R_n=\mathrm{C} \qquad (51)$$

次に，これらの点 $R_0,R_1,\cdots,R_n$ から立てた垂線を $v_0,v_1,\cdots,v_n$ として，

P_i：直線 v_i と l_i の交点 $(i=0,1,\cdots,n)$ (52)

と定める．こうして作られる点列

$$\{P_0,P_1,\cdots,P_n\} \qquad (53)$$

を結ぶ折れ線がすなわち石垣の輪郭を与えるのである．

したがって，上に与えられた数列 r_i はこの折れ線の各部分の勾配(cotangent)であり，特に

$$r_{n-1}=\frac{b}{h} \qquad (54)$$

であるから，石垣の基部の勾配は基本3角形のそれと一致する．

以上が古文書「石垣秘伝之書」にある作図手順を整理して，現代数学の言葉に翻訳して述べたものであるが，次にパラメター n を大きくしていったときに，折れ線が極限としてどのような曲線に近づくのかを計算してみよう．そのため，図6のように，水平方向に y 軸，鉛直方向に x 軸をとって座標を設定しよう．

点 P_i の座標を

$$P_i=(x_i,y_i) \qquad (55)$$

とおけば，x_i は明らかに

$$x_i=\frac{ih}{n} \qquad (56)$$

である．また，y_i について作図法から

$$y_{i+1}-y_i=r_i\frac{h}{n},\quad y_n=b \qquad (57)$$

$$r_{i+1}-r_i=\frac{nd}{(n-1)(i+1)h},\quad r_{n-1}=b/h \qquad (58)$$

によって与えられる．そこで，

$$\triangle x=x_{i+1}-x_i=\frac{h}{n} \qquad (59)$$

$$\triangle y=y_{i+1}-y_i \qquad (60)$$

$$\triangle r=r_{i+1}-r_i \qquad (61)$$

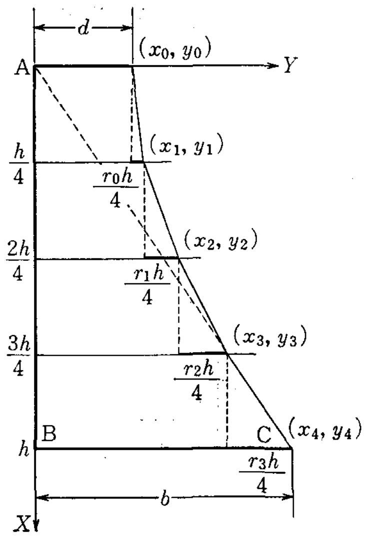

図 6　座標軸のとり方 2

とおけば，これらの式は次のようにまとめられる．

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=r \qquad (62)$$

$$\frac{\triangle r}{\triangle x}=\frac{n}{(n-1)}\cdot\frac{1}{(i+1)\frac{h}{n}}\cdot\frac{d}{h} \qquad (63)$$

そこで，$n\to\infty$ すなわち，$\triangle x\to 0$ と極限移行すれば，

$$\frac{dy}{dx}=r \qquad (64)$$

$$\frac{dr}{dx}=\frac{1}{x+\varepsilon}\cdot\frac{d}{h} \qquad (65)$$

という連立微分方程式が得られる．なお，ここに ε は正の微小な値で，$x=0$ でも微分方程式が定義できるために導入したパラメターである．方程式を解いた後にゼロに近づけるものとしよう．

また，この連立微分方程式の初期値を，ε に関する極限操作にかかわる点 $x=0$ で与えるよりは，$x=h$ における値を用いた方が取り扱いが容易になる．すなわち終端条件

$$y(h)=b \qquad (66)$$

$$r(h)=\frac{b}{h} \qquad (67)$$

を用いることにしよう．

まず，第2の微分方程式を積分すれば，

$$r(x)=\frac{d}{h}\ln(x+\varepsilon)+c \qquad (68)$$

となる．ここに，c は積分定数であるが，終端条件(67)によって値を定めて(68)式に代入すれば，

$$r(x)=\frac{d}{h}\ln\left(\frac{x+\varepsilon}{h+\varepsilon}\right)+\frac{b}{h} \qquad (69)$$

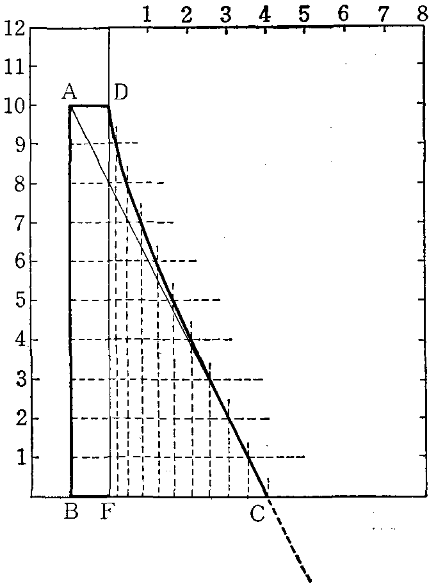

図 7　「石垣秘伝之書」の折れ線と極限の曲線

が得られる．

次に (69) 式を第 1 の方程式 (64) に代入して積分すれば，

$$y_\varepsilon(x)=\frac{d}{h}\left[(x+\varepsilon)\ln\left(\frac{x+\varepsilon}{h+\varepsilon}\right)-(x+\varepsilon)\right]+\frac{b}{h}x+c \tag{70}$$

を得る．この式の c も積分定数であるから，終端条件 (66)によってその値を定めて代入すれば，

$$y_\varepsilon(x)=\frac{d}{h}\left[(x+\varepsilon)\ln\left(\frac{x+\varepsilon}{h+\varepsilon}\right)-(x-h)\right]+\frac{b}{h}x \tag{71}$$

となる．すなわち，求める曲線は

$$y(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}y_\varepsilon(x) \tag{72}$$

ということになる．容易に確かめられるように，この関数は両端の条件

$$y(0)=d \tag{73}$$

$$y(h)=b \tag{74}$$

を満たしている．

そこで結局，極限となる曲線の方程式は次のようになる．

$$y(x)\begin{cases}=d & x=0\\ =d+\frac{1}{h}\left[(b-d)x+dx\ln\frac{x}{h}\right] & x>0\end{cases} \tag{75}$$

図 7 には，計算機によって古文書の数値について，古文書の作図を実行したものに上の式で与えられる曲線を重ねたものが示してある．この場合にもほとんど完全な一致が見られる．

4. おわりに

以上，古文書にあらわれた石垣の作図法 2 つについてキザミを無限小にしたときの極限の曲線を求めてみた．1 つは放物線に，もう 1 つは対数関数の原始関数になった．まだ他にも作図法があるかもしれないが，とにかく 1 つの様式に対して複数の作図法が存在することは大変興味深い．それと同時に，これをめぐって 2, 3 の疑問点がうかびあがる．

①2 つの作図法によって作られる曲線そのものには，外見上の差異があるだろうか？

このことに関しては，石垣の諸元をあわせて，2 つの方法のそれぞれで作図して重ねてみた結果「石垣秘伝之書」のものの方が若干直線的であるものの，その差異は建造物上では殆ど気づかれない程度のものであることがわかった．

②上の結果からすると，この様式は形が先に成立して作図法はむしろ後に考案されたようにも推察できるが，その作図法は如何なる着想・知識にもとづくものであろうか？

これに関しては文献 [1] にも示唆されているように，石垣の形よりもっと古い伝統をもつ反り屋根の形との関係(反り屋根を90°回転した形)が気がかりである．反り屋根については，施工上は加重懸垂線がつかわれているが，作図法に関しては別の方法があるのではないかと筆者は考えており，そのような文書をさがしている所である．

③もう 1 つの疑問点は，この作図法と和算との関係である．これらの方法の考案者はアルゴリズムを構成するに当ってかなりの程度の数列知識をもっていたことが推察できる．これを作図に応用するに当っては，和算の方に，すでに原型となるような例題があるのだろうか？

これも，今後の問題としたい．

参 考 文 献

[1] 北垣聰一郎「石垣普請」，法政大学出版局，1987

[2] 田淵実夫「石垣」，法政大学出版局，1977

[3] 井上宗和「城」，法政大学出版局，1973

[4] 内藤　昌「城の日本史」，日本放送出版協会，1979

[5] 相賀徹夫「城郭辞典」，小学館，1981

[6] 宮上茂隆・穂積和夫「大阪城」，草思社，1984

[7] 喜内　敏「城石垣の秘法と史料」，「探訪日本の城」別巻，小学館，1978

[8] 喜内　敏監修「金沢城郭史料」，石川県図書館協会，1976