

# M/G/s 待ち行列の近似式の有効性について

木村 俊一

## 1. まえがき

待ち行列理論の応用上の関心は、窓口が1つの場合よりも窓口が2つ以上ある場合に集まることが多い[8]。システムの性能を改善するための意思決定のほとんどはサービス窓口単体の性能向上よりはサービス窓口の個数をいかに定めるかにかかわっている。しかし、一般には複数窓口待ち行列システムの解析は単一窓口の場合に比べて容易ではなく、特に、サービス時間分布が一般形で与えられる場合には未だに厳密な解析解は得られていないのが現状である。解析が比較的容易と考えられがちなポアソン到着の場合(i. e., M/G/s 待ち行列)でも、この状況にはなんの変化もない。待ち特性量の解析が可能なのはサービス時間分布が相型分布または一定時間分布の時に限定され、前者においても陽な解析解が得られるのは指数分布の場合(i. e., M/M/s 待ち行列)に限られている。こういった状況をふまえて、本稿では M/G/s のいくつかの近似式に対して、トラフィック密度  $P$  と窓口数  $s$  がどの範囲にあれば良い近似を与えるかを考察する。最後に現段階で最も有効な近似式を提示する。これはシステムの評価に十分役立てられると思うので、ぜひご利用いただきたい。

## 2. Lee-Longton の近似式の検証

### 2.1 Lee-Longton の近似式

近似の対象とする M/G/s 待ち行列システムは以下の仮定によって特徴づけられているものとする。すなわち客はパラメータ  $\lambda (> 0)$  のポアソン過程にしたがってシステムに到着する。サービス窓口は全部で  $s (\geq 1)$  個あり、空いている任意の窓口で客はただちにサービスを受けることができる。もしすべての窓口が先に到着した客のサービスのために塞がっている場合は、客は行列を待つ

くり先着順にその後空いた窓口でサービスされる。窓口における客のサービス時間は、すべての窓口において独立で同一の分布  $B(\cdot)$  にしたがう確率変数であるとする。分布  $B(\cdot)$  の平均と変動係数(=標準偏差/平均)をそれぞれ、 $1/\mu$  および  $c$  で表わすことにする。また、システムは定常状態にあると仮定する。以下では、この M/G/s 待ち行列の平均待ち時間を  $EW(M/G/s)$  で表わすことにする。さらに、システムの輻輳の程度を表わす1つの尺度として、トラフィック密度を  $\rho = \lambda/s\mu$  で定義する。システムは定常状態にあることから、 $\rho < 1$  が成り立つ。

Lee and Longton[5] は  $EW(M/G/s)$  に対して次の簡単な近似式を提案している。

$$EW(M/G/s) \approx \frac{1}{2}(1+c^2)EW(M/M/s) \quad (1)$$

ここで、 $EW(M/M/s)$  は近似の対象としている M/G/s 待ち行列と同一の窓口数、平均サービス時間およびトラフィック密度をもつ M/M/s 待ち行列の平均待ち時間を表わし、よく知られているように

$$EW(M/M/s) = \frac{(s\rho)^s}{s!s\mu(1-\rho)^2} \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right\}^{-1} \quad (2)$$

で与えられる。Lee-Longton の近似式(1)は、M/G/1 待ち行列の平均待ち時間に対する Pollaczek-Khintchine の公式

$$EW(M/G/1) = \frac{1}{2}(1+c^2)EW(M/M/1) \quad (3)$$

を複数窓口の場合に単純に拡張したものに過ぎないが[9, pp.61-62]、その後、Stoyan[12]、Hokstad[2]、Tijms et al.[13]、Miyazawa[7]等によるさまざまな近似のアプローチの結果として再発見されている。明らかに(1)は、 $s=1$  のとき厳密解と一致し、また、重負荷時(i. e.,  $\rho \rightarrow 1$  のとき)には重負荷極限定理が示す正確な極限値を与える。しかし、(1)は  $s \rightarrow \infty$  のとき、漸近の性質

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{EW(M/G/s)}{EW(M/M/s)} = 1 \quad (4)$$

を満たさないため、窓口数が大きくなるにつれてその誤差が増加する傾向がある。この欠陥を補正し、 $M/D/s$  待ち行列に対しても厳密解を与える近似式が Page [10] と Kimura [3] によって提案されている。Page の近似式は

$$EW(M/G/s) \simeq (1-c^2)EW(M/D/s) + c^2 EW(M/M/s) \quad (5)$$

であり、一方 Kimura の近似式は

$$EW(M/G/s) \simeq \frac{1+c^2}{\frac{1-c^2}{EW(M/G/s)} + \frac{2c^2}{EW(M/M/s)}} \quad (6)$$

と表わされる。これらの近似式は  $EW(M/D/s)$  という新たな情報を用いる分だけ Lee-Longton の近似式よりも正確であり、性質 (4) も満たしている。しかしその分扱いがやや面倒になっていることも事実である。近似式 (5), (6) を実際に用いるに当たっては、 $EW(M/D/s)$  の値を数表 (e.g., [1, 11]) などによって求める必要がある。そこで、もし (5), (6) における  $EW(M/D/s)$  を (1) によって近似するとどうなるであろうか？ すなわち、(5), (6) において  $EW(M/D/s)$  の代わりに  $\frac{1}{2}EW(M/M/s)$  を代入すると、両者は (1) に一致することがわかる。したがって、(5), (6) の近似精度の良さを 1 つの目安としたとき、Lee-Longton の近似式の  $M/G/s$  待ち行列全体に対する近似精度は、 $M/D/s$  待ち行列に対するそれからある程度類推することができると考えられる。事実、数値実験から、変動係数が 1 以下のサービス時間分布をもつ  $M/G/s$  待ち行列に対しては、Lee-Longton の近似式は  $M/D/s$  待ち行列のときに最も近似精度が良くないことがわかっている。

## 2.2 $EW(M/D/s)$ に対する近似式

$M/D/s$  待ち行列に対する (1) の近似精度を検証するに当たっては、 $EW(M/D/s)$  に対する厳密解を計算する必要があるが、これは必ずしも容易ではない。 $EW(M/D/s)$  に対しては何通りかの異なった解析的表現が与えられているが、それらはいずれも数値計算上の問題点を含んでいる。特に、窓口数が大きいとき、または重負荷のときには解析解を正確に求めるためにはそれなりの計算環境を整える必要がある。筆者 [4] は、 $EW(M/D/s)$  を簡単に求めるために次の近似式を提案している。

$$EW(M/D/s) \simeq \frac{1}{2} \{1 + f(s)g(\rho)h(s, \rho)\} EW(M/M/s) \quad (7)$$

ここで、

$$f(s) = \frac{(s-1)(\sqrt{4+5s}-2)}{16s} \quad (8)$$

$$g(\rho) = \frac{1-\rho}{\rho} \quad (9)$$

$$h(s, \rho) = \sqrt{1 - \exp\left\{-\frac{2\alpha(\rho)}{s-1} \left[1 - \exp\left\{-\frac{\rho b(s)}{1-\rho}\right\}\right]\right\}} \quad (10)$$

$$\alpha(\rho) = \frac{25.6}{\{g(\rho)\}^2 \left\{1 - \exp\left(-\frac{\rho\beta}{1-\rho}\right)\right\}^2} \quad (11)$$

$$b(s) = \frac{s-1}{(s+1)f(s)\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2\alpha}{s-1}\right)}} \quad (12)$$

であり、(11), (12) における  $\alpha, \beta$  は関係式

$$\alpha\beta^2 = 25.6 \quad (13)$$

を満たす正定数である。近似式 (7) はこれらの定数に関してはかなりの頑健性 (ロバストネス) をもっているが、実際の計算に当たっては  $\alpha = 2.0 \sim 2.7$  程度の値を用いたときに最良の精度をもつことが数値実験で確かめられている。近似式 (7) は  $s=1$  のとき厳密解と一致し、 $s \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$  および  $\rho \rightarrow 1$  のときには厳密解の有すべき漸近的性質を満たしている。またその近似精度は、ほとんどの  $(s, \rho)$  の組合せに対し、相対誤差にして 1% 未満であることも確かめられている。

## 2.3 近似精度の検証

以下では、計算の厄介な厳密解の代わりに (7) を用いて (1) の近似精度を評価することにする。まず、(1) と (7) を比べることで  $M/D/s$  待ち行列と  $M/M/s$  待ち行列の平均待ち時間の比

$$r(s, \rho) = \frac{EW(M/D/s)}{EW(M/M/s)} \quad (14)$$

に着目する。この  $r(s, \rho)$  を用いると  $M/D/s$  待ち行列に対する Lee-Longton の近似式は

$$r(s, \rho) \simeq \frac{1}{2} \quad (15)$$

と表わされ、(7) は

$$r(s, \rho) \simeq \frac{1}{2} \{1 + f(s)g(\rho)h(s, \rho)\} \quad (16)$$

と表わすことができる。(15) と (16) の違いを見るに当たって、窓口数  $s$  の取りうる値が 1 から  $\infty$  までの半無限区間にわたっていることは非常に不便なので、 $s$  を次のように変数変換することで窓口数を表わすパラメータを有限区間に制限する。すなわち、新しい変数として

$$\theta = \frac{s-1}{s+1}, \quad s \geq 1 \quad (17)$$

を導入する。また、 $r(s, \rho)$  を

$$R(\theta, \rho) \equiv r\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}, \rho\right) \quad (18)$$

と表わすことにする。 $\theta$  は本来可算無限個の離散点上で

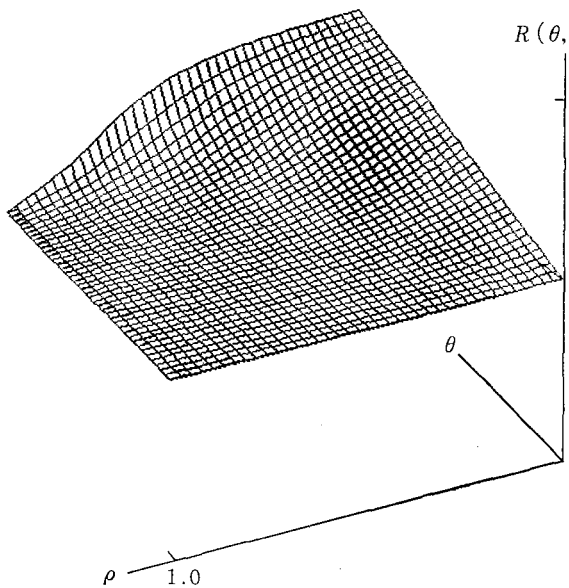


図 1  $R(\theta, \rho)$  の幾何学的表現 ( $0 \leq \theta \leq 0.975$ ,  $0 \leq \rho < 1$ )

しか意味をもたないが、これを実数にまで拡張して考えることにすると、関数  $R(\theta, \rho)$  は  $(\theta, \rho)$  平面内の領域

$$\{(\theta, \rho) | 0 \leq \theta < 1, 0 < \rho < 1\} \quad (19)$$

上のある曲面とみなすことができる。図 1 は (16) に対応する曲面を表わしたものである [4]。Lee-Longton の近似式  $R(\theta, \rho) \sim \frac{1}{2}$  は、この曲面よりも常に下に位置していることから、近似値としては常に過小評価をしていることがわかる。軽負荷時または窓口数が大きいときの誤差の増加もこの曲面の形から読みとることができる。

(15) と (16) の違いをより一層はっきりさせるために、図 1 の曲面の等高線を表わしたのが図 2 である。図 2 より、領域 (19) の左上方においては、Lee-Longton の近似式の作る面と (16) はかなり接近していることがわかる。つまりこの領域が Lee-Longton の近似式が安心して使える範囲であるといえる。あとはこの安心領域をどう定義するかが問題になるが、なるべく簡単な領域指定が望ましいので、図 3 (a), (b) の 2 通りの指定の仕方を取ることにする。まず、図 3 (a) のように

$$S_1 = \{(\theta, \rho) | 0 \leq \theta < 1, \theta \leq \rho < 1\} \quad (20)$$

によって安心領域を定義すると、等高線の値からみて  $S_1$  の内部では 10% 以内の誤差を保證することができる。(20) は窓口数に直すと

$$1 \leq s \leq \left[ \frac{1+\rho}{1-\rho} \right] \quad (21)$$

の範囲に相当する。(ただし、 $[x]$  は  $x$  の整数部分を表

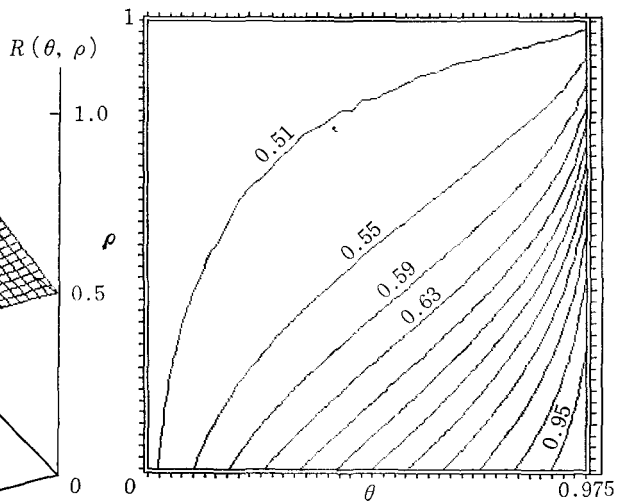


図 2 曲面  $R(\theta, \rho)$  の等高線図

わす。) また、図 3 (b) のように

$$S_2 = \{(\theta, \rho) | 0 \leq \theta < 1, (\theta-1)^2 + \rho^2 \geq 1, 0 < \rho < 1\} \quad (22)$$

によって安心領域を定義すると、 $S_2$  の内部では 2% 以内の誤差を保證できる。この場合、窓口数の範囲は

$$1 \leq s \leq \left[ \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} - 1 \right] \quad (23)$$

となる。(21) および (23) の結果は  $M/D/s$  待ち行列に対して成り立つものであるが、2.1 節で述べたことを考慮すると、変動係数がそれほど大きくない (e.g.,  $c^2 \leq 2$  程度) の  $M/G/s$  待ち行列に対してもほぼ同様の精度を保證できるものと考えられる。

以上より、与えられた待ち行列問題に対し Lee-Longton の近似式を適用するに当たっては、その問題で要求される精度に応じて、(21) または (23) の条件をまずチェックする必要があることがわかった。

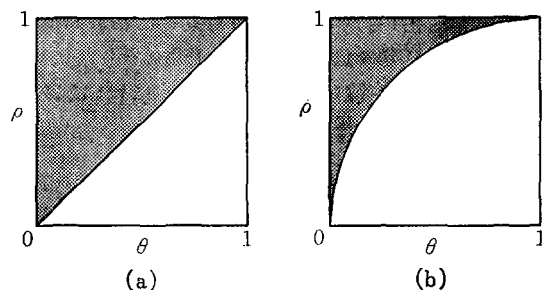


図 3 Lee-Longton の近似式の安心領域

### 3. 推奨する近似式

Lee-Longton の近似式は簡単な式であるにもかかわらず広い適用範囲をもっているが、その精度にはおのずと限界がある。この節では、これまでに得られている  $M/G/s$  待ち行列の待ち特性量に対する近似式の中で、比較的近似精度が安定して高く、しかも簡単なものを示すことにする。

まず平均待ち時間については、手前味噌ではあるが Kimura の近似式(6)を推奨する。(6)は Page の近似式(5)と同様に  $M/M/s$  待ち行列と  $M/D/s$  待ち行列の平均待ち時間に対する厳密解を必要とするが、近似精度の点で(5)よりも優れている。また(6)は、 $M/G/1$ ,  $M/M/s$ ,  $M/D/s$  に対しては厳密解を与え、 $s \rightarrow \infty$  または  $\rho \rightarrow 1$  のとき正確な漸近的性質をもつ。 $M/D/s$  待ち行列の厳密解については数表が利用できる場合を除いては、近似式(7)を用いればよい。このとき、(6)は(16)を用いると

$$EW(M/G/s) \sim \frac{r(1+c^2)}{(2r-1)c^2+1} EW(M/M/s) \quad (24)$$

と書き直すことができる。

平均待ち客数  $EL_q(M/G/s)$  および平均系内客数  $EL(M/G/s)$  については Little の公式を用いて

$$EL_q(M/G/s) = \lambda EW(M/G/s) \quad (25)$$

$$EL(M/G/s) = EL_q(M/G/s) + s\rho \quad (26)$$

と求めることができる。

待ち確率、すなわち到着した客が待たなければならない確率  $\Pi = P\{W > 0\}$  については、 $M/M/s$  待ち行列の待ち確率

$$\Pi = \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right\}^{-1} \quad (27)$$

を  $M/G/s$  待ち行列の待ち確率の近似として推奨する。この近似の妥当性については以前より数値的に確認されていたが、Hokstad, Tijms et al., Miyazawa 等により理論的にも自然な近似であることが示されている。

系内客数分布については、Tijms et al. により陽な近似分布が求められているが、その評価には数値積分を必要とし簡単なものとは言い難い。待ち時間分布についてもこの系内客数分布から導くことができるが[6]、やはりその解の評価には厄介な数値計算を必要とすることが知られている。これらに対しては、今後より使いやすい近似式の導出が望まれる

### 参考文献

- [1] Hillier, F.S. and O.S. Yu, *Queueing Tables and Graphs*, North-Holland, New York, 1982.
- [2] Hokstad, P., "Approximations for the  $M/G/m$  Queues," *Operations Res.*, 26(1978), 510-523.
- [3] Kimura, T., "A Two-Moment Approximation for the Mean Waiting Time in the  $GI/G/s$  Queue," *Management Sci.*, 32(1986), 751-763.
- [4] 木村俊一, "M/D/s 待ち行列の平均待ち時間に対する近似", 電子情報通信学会論文誌 (A), J71-A (1988).
- [5] Lee, A. M. and P. A. Longton, "Queueing Process Associated with Airline Passenger Check-in," *Operational Res. Quart.*, 10(1959), 56-71.
- [6] Marshall, K.T. and R.W. Wolff, "Customer Average and Time Average Queue Lengths and Waiting Times," *J. Appl. Prob.*, 8(1971), 535-542.
- [7] Miyazawa, M., "Approximations of the Queue Length Distribution of an  $M/GI/s$  Queue by the Basic Equations," *J. Appl. Prob.*, 23(1986), 443-458.
- [8] 森雅夫, "OR on Queues," 第17回 SSOR 予稿集, pp.56-61, 1982.
- [9] 森村, 大前, 応用待ち行列理論, 日科技連, 1975.
- [10] Page, E., *Queueing Theory in OR*, Butterworth, London, 1972.
- [11] Seelen, L. P., H. C. Tijms and M. H. van Hoorn, *Tables for Multi-Server Queues*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [12] Stoyan, D., "Approximations for  $M/G/s$  Queues," *Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization*, 7(1976), 587-594.
- [13] Tijms, H. C., M. H. van Hoorn and A. Federgruen, "Approximations for the Steady-State Probabilities in the  $M/G/c$  Queue," *Adv. Appl. Prob.*, 13(1981), 186-206.