ネットワーク―積形式解の最近

川島 武，紀 一誠

1. はじめに

客が複数の窓口を適当な規則のもとに次々と訪問するようなモデルを待ち行列網（queneing network，以後QNと記す）と呼ぶ．通信網，計算機システムなどを評価するさいにはQNとしてモデル化されることが多く，各種のQNに対して，シミュレーション，近似解法などいろいろな解析手法が提案されている．なかでも理論的に厳密解が得られ，応用上も重要な一連のQNがある．この厳密解はその形式から積形式と呼ばれているが，本稿では積形式を有するQNに関する理論的背景と，これらを実際に応用する場合の計算アルゴリズムについて文献[8]を補足し発展させる形で紹介する．

2.1 Jackson 型 QN と局所平衡

窓口はN個あり， 各窓口iは$M(\mu_i)/S_i$すなわち，サービス率μ_iの指数型で扱者はS_i人，FCFS規律とする．客は外部から到着率λのポアソン過程で到着し，確率p_{oi}で窓口iの列に並ぶ．窓口iを退去する客は確率p_{ij}で窓口jに行くかp_{io}で外部に去る．($\sum_{j=0}^{N} p_{ij}=1$, $i=0,\cdots,N$) 各窓口にk_1, $k_2,\cdots,k_N$人の客が並んでいる状態を$k=(k_1,\ k_2,\cdots,k_N)$で表わし，その定常確率を$p(k_1,k_2,\cdots,k_N)$とすれば次の積形式で表わされる[9]．

$$p(k)=p(k_1,k_2,\cdots,k_N)=\left\{\prod_{i=1}^{N}\prod_{l=1}^{k_i} a_i/\mu_i(l)\right\}/G, \quad (1)$$

ただしGは正規化定数，$\{a_i\}$は次の方程式(2)の解であり，$\mu_i(l)$は(3)で与えられる．

$$a_i=\lambda p_{oi}+\sum_{j=1}^{N} a_j\, p_{ji},\quad i=1,2,\cdots,N. \quad (2)$$

$$\mu_i(l)\equiv\min(S_i,\ l)\,\mu_i \quad (3)$$

(2)よりa_iは窓口iへの外部および内部からの客の平均到着率と解釈できる．(1)が定常確率といえるのは，当然ながら次の平衡方程式を満たしているからである．

$$p(k)\,(\lambda+\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k_i))=$$
$$\sum_{i=1}^{N}(p(k-e_i)\lambda p_{io}+p(k+e_i)\mu_i(k_i+1)p_{io}+\sum_j p(k-e_i+e_j)\,\mu_j(k_j+1)p_{ji}) \quad (4)$$

ただし$k=(k_1,k_2,\cdots,k_N)$，$e_i=(0\cdots010\cdots0)$（第i成分だけ1）．(4)は各状態kについて｛kから他の状態に推移する率｝=｛他の状態k'からkに推移する率の総和｝と換言することができる．また容易に確かめられるが，(1)は(4)を分解した次の方程式群も満たしている．

$$p(k)\mu_i(k_i)=\sum_j p(k-e_i+e_j)\mu_j(k_j+1)\,p_{ji}+p(k-e_i)\lambda p_{oi},\quad i=1,2,\cdots,M$$
$$p(k)\lambda=\sum_i p(k+e_i)\mu_i(k_i+1)p_{io} \quad (5)$$

(5)の最初の式は｛状態kで窓口iの客の退去により他の状態kに推移する率｝=｛窓口iに客が到着することにより状態kに推移する率｝，後半の式は｛状態kで外部からの到着により他の状態kに推移する率｝=｛客が系外に去ることにより状態kに推移する率｝とそれぞれ解釈できる．(5)は局所平衡方程式またはstation balanceなどとも呼ばれている．さて局所平衡が成り立つQNについては，サービス時間分布などを変えても，期待値が不変ならば定常確率$p(k)$も不変であるというinsensitivityと呼ばれる性質をもつ．しかしFSFSをもつ窓口でのサービス時間分布は数に限指られているなどの制約があり，次節でこれについて検討する．

なお，(3)の$\mu_i(l)$はS_i人の扱者がいることから定まる式であるが，(1)からわかるようにこの関数形は一般でよい．$\mu_i(l)$はl人並んでいるとき，1つのサービスが終了する率である．規律が異なっても$\mu_i(l)$は同一になることもあり，$S_i=1$の場合，FCFS, PS, LCFSのいずれに対しても$\mu_i(l)=\mu_i$（一定）と表わされる．

2.2 GSMP と積形式

QNにおいて到着間隔，サービス分布などに一般の分布形を仮定するとき，GSMP (Generalized Semi Markov Process) として解析される．(k,y)で任意時

かわしま たけし 防衛大学校*
*〒239 横須賀市走水1―10―20
きの いっせい 日本電気㈱

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

刻の状態を表わす．k は前節と同様に各窓口での客の並び方を表わすベクトルである．$y=(y_1, y_2, \cdots, y_{M(k)})$ は進行中のサービスすべての経過時間，および最終到着後からの経過時間からなるベクトルであり，各 y_j を補助変数と呼ぶこともある．y の構成は k によって定まるものとする．時刻 t で経過時間が y_j であるサービス j が $(t, t+dt)$ に終了する確率は次のように表わされる．

$$\{F_j(y_j+\nu_j(k)dt)-F_j(y_j)\}/(1-F_j(y_j)), \tag{6}$$

ただし，F_j はサービス j の分布関数であり，$\nu_j(k)$ は状態 k でのサービス j の処理速度である．F_j が指数分布であれば(6)は y_j によらない値であり，補助変数には取り入れないものとする．処理速度は普通1と考えられるが，PS の場合，n 人の客が並んでいるときは $1/n$ となる．指数分布の場合，これを期待値で除した値がサービス終了率になる．状態 (k, y) で y_j が消滅するとは y_j に対応する到着またはサービスの終了が生起することを意味し，この時QNの定義に応じた確率 $p(k, j, k')$ で状態 (k', y') に推移する．y' は y から y_j を取り去り，新たな0を付加し，k' にもとづいて構成される．

以上のGSMPに対し，各補助変数 y_j に対応する各分布 F_j を期待値を同一にしたまま指数分布に置きかえるとMarkov過程となり，その平衡方程式は次のようになる．

$$p(k)\sum_{j}^{M(k)} \mu_j \nu_j(k) \sum_{k'} p(k, j, k')$$

$$=\sum_{k''} p(k'') \sum_{h}^{M(k'')} \mu_h \nu_h(k'') p(k'', h, k) \tag{7}$$

$$\text{for all } k.$$

ここで μ_j^{-1} は F_j の期待値である．もとのGSMPで状態 (k, y) の y_j が消滅して (k', y') に推移した場合 y' に引き継がれる0でない y_j の集合と，(k'', y'') の y_h が消滅して (k, y) に推移した場合 y に引き継がれる0でない y_j の集合を考え，2つの集合が一致するような k と k'，k'' と k の組合せについて(7)を分解すると次式を得る．

$$p(k)\mu_j \nu_j(k) \sum_{k'} p(k, j, k')$$

$$=\sum_{k'', h}{}' p(k'')\mu_h \nu_h(k'') p(k'', h, k) \tag{8}$$

ここで左辺は (k, y) で y_j が消滅する場合の推移を表わし，右辺の $\sum'$ は $(k'', y-y_j+y_h'')$ と書けるような k'' と h の組合せについての和である．(8)は一種の局所平衡方程式であるが，その構成はGSMPの枠内で説明でき，「窓口」という言葉を用いなくてよい点が重要である．(7)の解 $p(k)$ が(8)も満たすならばGSMPの定常な同時確率密度 $p(k, y)$ は次のようになり，これも積形式と呼ばれている．

$$p(k, y)=p(k) \prod_{j}^{M(k)} \mu_j(1-F_j(y_j)) \tag{9}$$

(9)を y_j について積分すれば k の定常確率が得られinsensitivityが成り立つことは明らかである．結局(7)の解が(8)を満たすことがinsensitivityとなるための十分条件になっている．このような研究はMatthes [19]以来多くなされているが，Burman [4] の記述が比較的簡潔である．Markov過程に対し一般分布を導入するinsensitivityの考え方もあり，Whittle [26] の記述が簡潔である．この方法による表現はQNにあてはめにくいところもある．[4]と[26]の結果を統一する見方を探るのも残された課題の1つであろう．

Jackson型に立ち戻り(8)の考え方で局所平衡方程式を得ると，到着はポアソン，規律はKelly [10]により導入された対称形であれば，これらの窓口に対する(8)式は(4)と一致する．BCMP型といわれるPS, LCFS, 無限サーバーなどの規律は対称形の1つである．FCFSの窓口については(4)よりさらに分解された式となり，解は存在しなくなる．Jackson型では規律そのものにはよらず $\mu_i(l)$ だけで定常確率が表現されたが，一般分布を仮定した場合には，このようなわけにはならないのである．

2.3 もう1つの積形式

QN内の窓口をいくつかたどるときの所要時間について考えよう．1つ1つの窓口での滞在時間は互いに相関をもち，解析は困難であるが，**図1**のような場合には厳密解が得られている．図1は M 人の客が循環しているJackson型の特別な場合である．どの窓口でも規律はFCFSであり，扱者数は S_1, S_N を除いて $S_2=\cdots=S_{N-1}=1$ である．$W_1, W_2, \cdots, W_N$ を1人の客の各窓口での引き続く滞在時間とする．窓口 i に到着したとき，列の長さが k_i（自分自身は含まず）ならば W_i の特性関数 $E(\exp(-\theta_i W_i))$ は

$$f_i(\theta_i|k_i)$$

$$\equiv(\mu_i/(\theta_i+\mu_i))(s_i\mu_i/(\theta_i+s_i\mu_i))^{\max(0, k_i+1-s_i)} \tag{10}$$

となるが，$W_1, W_2, \cdots, W_N$ の同時特性関数も次式となる．

$$E(\exp(-\theta_1 W_1-\cdots-\theta_N W_N))$$

$$=\sum_{|k|=M-1} p_{M-1}(k_1, k_2, \cdots, k_N) \prod_i f_i(\theta_i|k_i) \tag{11}$$

ここで $p_{M-1}(k)$ は $M-1$ 人が循環している場合の定常確率であり，$|k|\equiv k_1+k_2+\cdots+k_N=M-1$ となる k に対して意味をもつ．これは窓口 i に客が到着したという条件の下での他の $M-1$ の客の並び方として得られる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

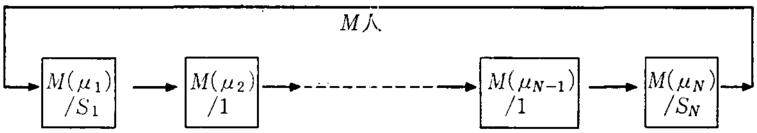

図 1 循環型ネットワーク

([12], [15]など). (11)では各々の窓口に到着した時点でのそこの列の長さではなく，窓口1に到着した時点での k_i を用いて表わされている点に興味がある．これも積形式と呼ばれている[23]．窓口Nの規律がＦＣＦＳでなくＰＳなどにも(11)は形式的には拡張できるが，(10)に相当する式は $k_1,\cdots,k_{N-1}$ などにもより，複雑になろう．$N=2$ で窓口1，2の規律を無限サーバ，ＰＳなどにした滞在時間の研究には[2]，[12]，[18]などがある．図1の系が開放形であれば Burke[3]の結果になる．また窓口1から窓口Nまでが Jackson 型の一部分になっているときも(11)が導びかれている([17]，[23])．

以上では記述を簡単にするため，客のクラス数は1に限定したが，多数あってもよい．クラスが異なるとは窓口間の移動規則が異なることであり，次章以下では複数クラスをもつＱＮも取り扱う．

3. 待ち行列網の計算アルゴリズム

2.1 に示される積形式型の待ち行列網を実用化するさいには，正規化定数の効率的計算法の開発が欠かせない．

正規化定数は，確率条件から定められる定数である．すべての部分連鎖(客の網内移動経路)が開放型の網については，正規化定数は解析的な形に求められ計算上の困難は生じない．しかし閉鎖型の部分連鎖を含む網では，部分連鎖にしたがう網内客数は一定という条件のもとに確率和を計算しなければならず，効率の良い計算アルゴリズムの開発が必要となる．

積形式網に関する計算法は大別して，たたみこみ法系統の計算法と，ＭＶＡ系統の計算法とに分類できる．

3.1 たたみこみ法(Convolution Algorithm)

(1) Buzen のアルゴリズム

Buzen[5]は，セントラルサーバモデルへの応用を目的とし，たたみこみ法による閉鎖型Jackson網の正規化定数の計算法を示した．

網内客数K人，ノード数Nの閉鎖型 Jackson 網の正規化定数 $G_N(k)$ は(1) 式と確率条件から次の形に書ける．

$$G_N(k)=\sum_{k_1+\cdots\cdots+k_n=K}\prod_{i=1}^{N} f_i(k_i)$$
$$=\sum_{m=0}^{K} f_i(m)\, G_{[i]}\,(k-m) \qquad (12)$$

ただし，$f_i(m)=a_i(m)e_i{}^m$ はノード i の滞在客数がmである周辺確率，$G_{[i]}(*)$ はノード i を元の網から取り除いてできる網 (i-complement網) における正規化定数．ここに，a_i を(2)の解(ノード i への平均訪問回数)，$e_i=a_i/\mu_i$，$a_i(m)$を次に示される容量係数とする．

$$a_i(m)=1/\{\prod_{j=1}^{m}\min(S_i,j)\},\ \ a_i(0)=1 \qquad (13)$$

(12)式は正規化定数 $G_N(K)$が $f_i(*)$と $G_{[i]}(*)$のたたみこみにより計算されることを示している．この計算法を Buzen のアルゴリズムといい，プログラム風に記述すると以下のようになる．

Buzen のアルゴリズム

```
For n=1 to N
  For k=0 to K
    G_n(k) ← Σ_{m=0}^{k} a_n(m) e_n^m G_{n-1}(k-m)
  Next k
Next n
```

(2) BCMP 網[1]

[19]ではM個の閉鎖型部分連鎖をもつ BCMP 網の正規化定数の計算法へとたたみこみ法を発展させた．Jackson 網の場合が1次元のたたみこみであったのに対して，BCMP 網では変数がベクトル化され，M次元のたたみこみ演算により正規化定数を計算する．閉鎖型に加えて開放型の部分連鎖をもつ混合型 BCMP 網の場合は[11]で扱っている．

(3) たたみこみ法の改良

たたみこみ型計算法では数値計算時に巾乗演算が大量に発生し，指数部のあふれ (オーバフロー／アンダーフロー) を発生しやすい弱点をもっている．[14]では，指数部のあふれを防ぎ安定にたたみこみ計算を実行するためスケーリングファクタを計算実行時に動的に変化させるダイナミックスケーリング法を提案している．

あるノードについて，異なる部分連鎖に属するすべての種類の客が到着してくるとは限らない場合，実際に有

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

効な情報が格納されるのはそのノードに到着する連鎖に関連する領域のみであり，残りの部分には0が格納される．この性質を利用し，[15] では記憶領域量の削減とともにたたみこみ演算量の削減を実現する方法，Tree Convolution 法を提唱している．

3.2 MVA法[22] (Mean Value Analysis)

(1) アルゴリズム

MVA法では正規化定数を直接計算せず，積形式解を漸化式の形に展開し，Little の公式と組み合せ数値計算を実行する．漸化式の形に導くさいに到着定理が使用される．

閉鎖型 Jackson 網で全ノードがシングルサーバ，すなわち $\mu_i(j)=\mu_i$, $a_i(m)=1$ を例にとる．$S_i(k)$, $L_i(k)$ を網内客数が k のときのノード i における客の滞在時間（待ち時間＋サービス時間）および滞在客数の平均値，$\lambda_i(k)$ をノード i のスループット（人／時間）とする．到着定理から，ある客のノード i への到着時点で出会う客数の平均値は，$L_i(k\text{-}1)$ となり，ノード i におけるこの客の平均滞在時間はサービス時間 $1/\mu_i$ を加え次となる．

$$S_i(k)=\{1+L_i(k-1)\}/\mu_i \tag{14}$$

Little の公式とスループットの定義から以下が成り立つ．

$$L_i(k)=\lambda_i(k)\,S_i(k) \tag{15}$$

$$\lambda(k)=k/\sum_{i=1}^{N} a_i\,S_i(k),\quad \lambda_i(k)=a_i\,\lambda(k)$$

以上より，網内客数が k-1 人である網について $L_i(k-1)$がわかれば，(14)，(15)，(16) を利用して $L_i(k)$ が計算できる．計算手順のプログラム風記述は以下のようになる．

MVAアルゴリズム (シングルサーバ網)

```
For k=0 to K
  For i=1 to N
    S_i(k)←{1+L_i(k-1)}/μ_i
  Next i
  λ(k)←k/{Σ_{i=1}^{N} a_i S_i(k)}
  For i=1 to N
    L_i(k)←a_i S_i(k) λ(k)
  Next i
Next k
```

(2) MVA法の改良

単一扱い者の場合の上記手順は数値計算上安定であるが，複数扱い者をもつノードが網内に存在するさいはそのノードに関する周辺確率の計算が必要になり，アルゴリズムが複雑になるとともに，仮数部の桁落ちという数値計算上の不安定現象が発生する．この問題点をさけるため，i-complement な網に関するスループット $\lambda_{(i)}(k)$ をスケーリングに利用する改良型 MVA 法，NCA 法 [20]，LBANC法 [7] 等改良が加えられている．プログラマブル電卓向けの計算アルゴリズム CCNC 法 [7] も提案されている．

(3) 近似型MVA法

MVA法は一般には計算に必要な記憶領域の量がたたみこみ法に比較して多量に必要となる．その理由は，MVAにおいては客数に関するループとノードに関するループの中で使用するデータを同時に記憶領域内にもたなければならない計算構造にある．この弱点を改良するため，近似法を導入し記憶領域量を削減する種々の計算方法 [6]，[24] が提案されている．MVA法を基礎とする近似計算法の解説と研究動向の紹介は[25]に詳しい．

3.3 計算法の特徴

たたみこみ法系統の算法とMVA系統の算法とは各々に特徴をもっており，実用化にさいしては目的に応じた算法をうまく選び，使い分けることが必要とされる．

演算量は，たたみこみ法，MVA法ともに同程度の演算量であり，本質的な差はない．記憶領域はたたみこみ法の場合およそ客数ベクトルで張られる空間量となる．MVA法では記憶領域量はたたみこみ法に比べて大量となる．**3.2**(3)に示した近似解法が開発されているが，計算精度は犠牲にせざるを得ない．どちらの系統の算法も数値計算上の不安定性をもっている．たたみこみ法の場合には指数部のあふれ現象，MVA法では複数扱い者ノードが存在する場合に仮数部の桁落ち現象が発生しやすい．

4. おわりに

待ち行列網の応用を考える時，重要な話題に積形式解をもたない網について，分解近似法をはじめとするさまざまな近似計算法があるが本稿では触れられなかった．

相互に干渉をもつ複雑な待ち行列ネットワークが種々の形の積形式をもつことは大変に興味深い．また，積形式という扱いやすい性質の追求と解明は，理論的興味のみならず応用面からも重要と思われる．今後の発展をさらに期待したい．

参考文献

[1] Baskett, F., Chandy, K.M., Muntz, R., and Paracios, J.: Open, closed, and mixed networks with different classes of customers,

 © 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

J. Acm, 22,2,248-260 (1975).

[2] Boxma, O. J. and Donk, P.: On Response-time and Cycle Time Distribution in cyclic queue, Perf. Eval. Vol. 2, 181-194 (1982).

[3] Burke, P. J.: The Output Process of a Stationary $M/M/S$ Queueing Systems, A.M.S., Vol.39, 1144-1152 (1968).

[4] Burman. D. Y.: Insensitivity in Queueing Systems, Adv. Appl. Prob., Vol. 13, 846-859 (1981).

[5] Buzen, J. P.: Computational Algorithm for Closed Queueing Networks with Exponential Servers, Comm. ACM, Vol. 16, No.9, 527-531 (1973).

[6] Chandy, K. M. and Neuse, D.: Linearizer: A Heuristic Algorithm for Queueing Network Models of Copmuter Systems, Comm. ACM, Vol. 25, No. 2, 126-134 (1982).

[7] Chandy, K. M. and Sauer, C. H.:Computational Algorithms for Product Form Queueing Networks, Comm. ACM, Vol. 23, No. 10, 573-583 (1985).

[8] 橋田温：最近のネットワーク手法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 26, No. 4, 205-212 (1981).

[9] Jackson, J. R.: Networks of Waiting Lines, Oper. Res., Vol. 5, 518-521 (1957).

[10] Kelly, F. P.: Reversibility and Stochastic Networks, John Wiley & Sons, 1978.

[11] 紀一誠：混合型待ち行列網の計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 24, No.3, 326-334 (1983).

[12] Kawashima, T.: On Sojourn Time Distribution in Cyclic Queueing Systems with a LiPS Station, J. Opn. Res. Soc. Japan, Vol. 30, No.3, 335-345 (1987).

[13] Kawashima, T.: Turnaround time equations in queueing networks, J. Opn. Res. Soc. Japan, Vol.21, 477-485 (1978).

[14] Lam, S. S.: Dynamic Scaling and Grawth Behavior of Queueing Network Normalization Constants, J. ACM., Vol. 29, No. 2, 492-513 (1982).

[15] Lam, S. S. and Line Y. L.: A Tree Convolution Algorithm for the Solution of Queueing Networks, Comm. ACM, Vol.26, No. 3, 203-215 (1983).

[16] Lavenberg, S. S. and Reiser, M.:Stationary State Probabilities at Arrival Instants for Closed Queueing Networks with Multiple Types of Nodes, J. Appl. Prob., Vol. 17, 1048-1061 (1980).

[17] Lemoine, A.J.:On Sojourn Time in Jackson Networks of Queues, J. Appl. Prob., Vol.24, 495-510 (1987).

[18] Mitra, D.: Waiting time Distributions from Closed Queueing Network Models of Shared-processor Systems, Performance '81, 113-131, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[19] Matthes, K.: Zur Theorie der Bedienungsprozesse, Trans. 3rd Prague Conf. Inf. Theory, 513-528.

[20] Reiser, M.: Mean Value Analysis and Convolution Method for Queue-Dependent Servers in Closed Queueing Networks, Perf. Eval., Vol. 1, No. 1, 7-18 (1981).

[21] Reiser, M. and Kobayashi, H.: Queueing Networks with Multiple Closed Chains: Theory and Computational Algorithms, IBM Res., Vol. 19, No. 3, 283-294 (1975).

[22] Reiser, M and Lavenberg, S. S.: Mean Value Analysis of Closed Multichain Queueing Networks, J. ACM, Vol. 22, No. 2, 313-322 (1980).

[23] Schassberger, R. and Daduna, H.: Sojourn Times in Queueing Networks with Multiserver Nodes, J. Appl. Prob., Vol. 24, 511-521 (1987).

[24] Schweitzer, P.: Approximate Analysis of Multiclass Closed Networks of Queues, Proc. Int'l. Conf. on Stochastic Control and Optimization, Amsterdam (1979).

[25] Silva, E. S., Lavenberg, S. S. and Muntz, R. R.: A Perspective on Iterative Methods for the Approximate Analysis of Closed Queueing Networks, Proc. Mathematical Computer Performance and Reliability, 225-243 (1984).

[26] Whittle, P.: Partial Balance and Insensitivity, J. Appl. Prob., Vol. 22, 168-176 (1985).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.