

# 通信系における待ち行列問題

高橋 豊

## 1. はじめに

通信システムの研究においては、待ち行列理論は通常トラフィック理論と呼ばれている。待ち行列理論に関する最初の論文は、20世紀初頭に発表された Erlang の論文にまで遡ることができ、彼の業績を記念して、公式、呼の単位、および確率分布に名前が冠せられていることは良く知られている。彼の論文が、電話交換に関するものであったことからわかるように、当時から待ち行列理論と通信とは強いつながりがあった。待ち行列理論の発展形態は、通信システムのそれに大きく影響され続けてきたと言っても過言ではないと思われる。

1950年代、60年代には今日の理論的基礎を構成している多くの論文が発表されたが、通信システムと待ち行列理論をより一層強く結びつけたのは、1970年代における蓄積交換網の発展である。従来からの電話交換網においては、2人の話者がどんなに遠くはなれていてもその間に物理的に1本の回線がつながり、1人のサーバとしてモデル化できるのに対し、蓄積交換網においては、1本の回線が2人で独占的に使用されるのではなく、いくつかの交換局を経て情報の授受が行なわれる。交換局間の送信が1人のサーバに対応する。結果として目的局に到達するまでには、何段階かのサービスを受けることになる。したがって、当時は Kleinrock をはじめとする多くの研究者により待ち行列網として数学的にモデル化され、盛んに性能評価が試みられた。解析の手段として待ち行列網が使われるきっかけをつくったのは、Kleinrock の独立性の仮定と呼ばれるものである。交換網を通して送られるメッセージまたはバケットは受信されるまで当然同じ長さである。したがって、待ち行列網でモデル化すると最初のノードでサンプルされた処理時間により以降のノードでの処理時間が決定されることになり、これ

を解析的に取り扱うのは不可能である。しかし実験により、本来従属している各ノードでの処理時間を独立であると仮定しても、実用的には十分であると確認された。これが独立性の仮定と呼ばれ、1970年代以降盛んに交換網の性能評価に待ち行列網が使われる契機となった。通信網の発達とともに現実システムと調和を保ち、種々のタイプの待ち行列網の解析的成果が精力的に発表され出した。たとえば閉鎖型待ち行列網は、輻輳回避のためのウィンドー・フロー制御、多重プログラミング計算機システム等の評価に用いられるし、ブロッキングの起こり得る制限型待ち行列網は通信網におけるバッファ管理、コンピュータ・システムにおける資源競合等に用いられている。

また、通信網の規模の増大により、閉鎖型待ち行列網の解析において現われる正規化定数の計算が問題となるが、この効率の良い計算法に関する研究も実際に数値結果を求める立場からなされている。また、システムの構成、処理能力等における変化がシステム全体の性能に与える影響を調べる感度分析（パラメトリック解析）に関する優れた成果も発表されている。これらはいずれも実際の応用例があってはじめて問題となることであり、待ち行列理論が通信網のシステム・モデリングと性能評価に盛んに活用されている証左であると思われる。昨年だけでも筆者が出席した国際会議で待ち行列理論を手段として通信系の性能評価を取り扱った研究が発表の全体あるいは一部を占めたものは合計6回（国外5、国内1）を数えた。このように諸外国では盛んに研究が行なわれているのが現状である。

以下では、最近筆者らが行なっている研究を例にとりながら、通信系において待ち行列理論がどのように活用されているか、さらに今後どのような理論的成果が待ち望まれるかを述べさせていただく。

## 2. ポーリング・システム

1人のサーバが複数の待ち行列を巡回し、客がいれば

たかはし ゆたか 京都大学 工学部 数理工学教室

〒606 京都市左京区吉田本町

1988年5月号

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会。無断複写・複製・転載を禁ず。

(5) 211

あらかじめ決められた処理規範にしたがって、処理をする待ち行列モデルをポーリング・システムという。この研究の起りには、1950年代イギリスの綿花工場における機械およびその修理人からなるシステムに関する事例研究にあるといわれており、機械修理人問題あるいは多重待ち行列とも呼ばれる。1970年代前半までに理論的研究は完遂された感があった。しかし今日の通信技術の発達により交換機、さらにはローカル・エリア・ネットワーク(LAN)における代表的な方式の一つであるトークン方式のモデル化に広く用いられるようになり、従来の解析の見直しがなされるとともに種々の新しいモデルが提案、解析されてきた [Takag 86]。現在この分野は待ち行列理論の研究の中で最も熱を帯びてとりくまれている分野の一つであり、性能評価に関する国際会議では、毎回数編の論文が発表され、急速に進展が見られる。

無限バッファをもつモデルで、全処理式(客がいなくなるまでサービスを行なう)およびゲート式(ポーリングされた時点ですでに待ち行列にいる客だけサービスする)モデルに関しては一般的な場合が解析されている。しかし制限式(1回のポーリングでサービスする客数に制限がある)に関しては、制限値が1の場合だけ、しかも非対称な(システムを記述するパラメータ、確率分布等が待ち行列ごとに異なっても良い)場合には待ち行列数が2の場合だけしか解析されていない。

これら3種の処理規範に対して平均待ち時間  $E[W_i]$  に関する興味ある保存則が示されている。 [Wats 84] [Ferg 85] [Takag 87] [Fuhr 87]

全処理式

$$\sum_{i=1}^N \rho_i E[W_i] = A$$

ゲート式

$$\sum_{i=1}^N \rho_i E[W_i] = A + \frac{R}{1-\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i^2$$

制限式(制限値は1)

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \left[1 - \frac{\lambda_i R}{1-\rho}\right] E[W_i] = A + \frac{R}{1-\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i^2$$

ただし、

$$A = \frac{\rho \sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\rho R^{(2)}}{2R} + \frac{R}{2(1-\rho)} \left[\rho^2 - \sum_{i=1}^N \rho_i^2\right]$$

上式において記号は次の意味をもつ。

$N$ : 待ち行列数

$\lambda_i$ : 客の到着率

$\mu_i, \mu_i^{(2)}$ : 待ち行列  $i$  における処理時間の平均と2次モーメント

$r_i, r_i^{(2)}$ : 待ち行列  $i$  から  $i+1$  への(あるいは  $M$  から  $1$  への)移動時間の平均と2次モーメント

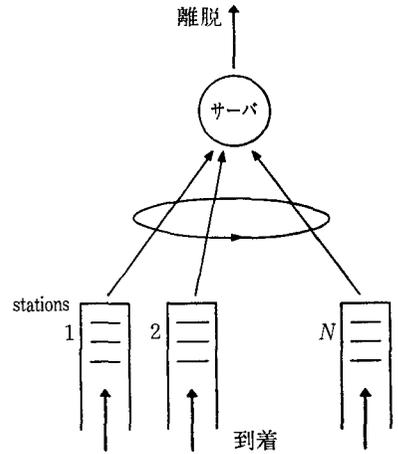


図1 ポーリング・システム

$R, R^{(2)}$ : 移動時間の和の平均および2次モーメント

$$\rho_i, \rho: \text{利用率}, \rho_i = \lambda_i \mu_i, \rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$$

これらは対称なシステムに対してはそのまま平均待ち時間を与え、非対称なモデルに対しては、待ち行列間の従属性を定量的に与えており興味深い。さらに制限値が1より大きい場合には次のようなタイトな不等式が示されている。

全処理制限式

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \left[1 - \frac{\lambda_i R}{k_i(1-\rho)}\right] E[W_i] \leq A + \frac{R}{1-\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i^2 / k_i$$

ゲート制限式

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \left[1 - \frac{\lambda_i R}{k_i(1-\rho)}\right] E[W_i] \leq A + \frac{R}{1-\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i^2$$

上式で  $k_1, \dots, k_N$  は各待ち行列での1回のポーリング当りの最大処理数である。これらの式は、特に制限式モデルに対して近似式を導くさいの出発点になり得ると思われる。

一方、単一バッファしかない場合に関しても非対称なモデル(各待ち行列が同じような確率的特性をもたなくても良い)が解析されている [Taki 87]。このモデルにおいて、到着過程はポアソン過程、サービス時間および待ち行列間の移動時間は一般的な確率分布にしたがっており、待ち時間分布およびスループットが得られている。対称なモデルに関しては、離脱時間間隔分布まで得られており [Taki 86]。図2にその変動係数を示す。さらに待ち行列のうち1つは無限バッファをもち、全処理式サービスを受けるモデルまで言及されている。この結果は通信系において今後の重要課題であるネットワークの相互接続にさいする性能評価において役立つと思われる。

今後の課題としては、これら上記のモデルのすきまを

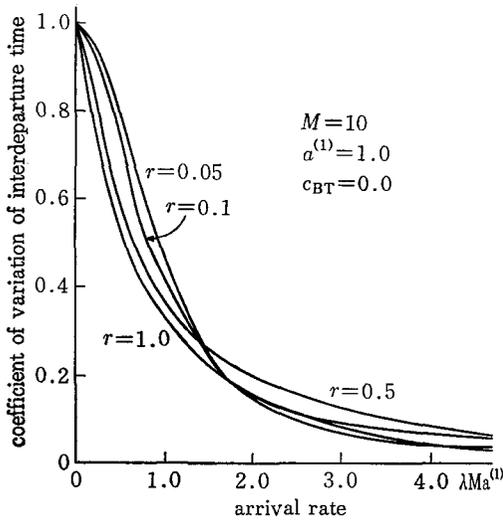


図 2 出力時間間隔の変動係数

埋める,より現実的なモデル,すなわち複数(無限ではない)バッファをもつポーリング・システムの解析が望まれるが厳密なものとは期待できなく,有効な近似法で満足しなければならないだろう。さらに客あるいは待ち行列に優先権の付与を許すものも今後のマルチメディア通信システムの性能評価を行なう上で重要である。

### 3. 競合型流通信方式における待ち行列問題

多くの利用者が,1本の通信回線を共有し,送信要求が生じたときのみ随時独自の判断にもとづき回線を利用する方式はランダムアクセス方式と呼ばれ,これまで数多くの研究がなされてきた。ランダムアクセス方式として今日代表的なのは CSMA 方式および ALOHA 方式

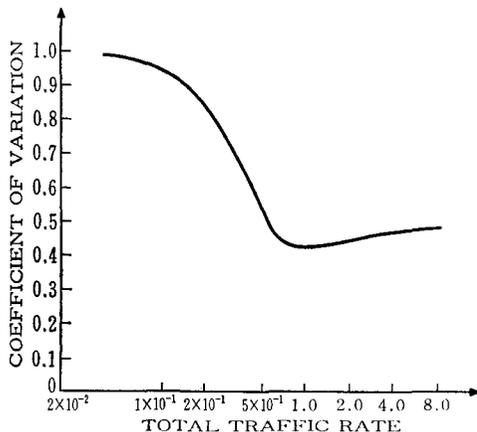


図 3 出力時間間隔の変動係数

である。しかしこれらに関する研究の多くは安易な近似あるいは送信端末の数を無限とする非現実的な仮定等に頼っており問題点を含んでいる。また待ち時間,出力時間間隔等の確率分布はほとんど解析されていなかった。Tobagiがはじめての時間を仮想的に離散化した Slotted CSMA/CD および Slotted ALOHA 方式に関し,待ち時間,出力時間間隔の分布を解析した。この結果は優れているが,時間を離散化すると計算の手間の2点で問題を含んでいる。

筆者らはより現実に近い連続時間モデルでこれらの分布を導いた [Takah 87]。その数値結果を図 3, および図 4 に示す。図 3 はトラヒック量の変化に対する出力時間間隔の変動係数の振舞いを示している。トラヒックの量にかかわらず出力時間間隔の変動係数は 1 より小さく,特にトラヒックが少ない時には変動係数が 1 に近いことから指数分布の性質をもつと思われる。このアクセス方式を採用している通信網を結合するときに網間のトラヒックはポアソン過程で表現できる可能性を示している。図 4 は待ち時間の変動係数を表わしている。この図および他の数値実験から,トラヒックが少ないときには変動係数に関して定まった傾向はなく,トラヒックが増加するにつれて 1 に近づくことが確かめられた。したがって,出力時間間隔とはちょうど反対に,待ち時間はトラヒックが増すにつれ指数分布の性格を帯びると言える。音声等の実時間制約の強いトラヒックを CSMA 方式で送受信するにはなんらかの付加的な機能を追加する必要があることが結論づけられる。

### 4. 遊休のある M/G/1 待ち行列

ポーリング・システムおよびランダム・アクセス方式の性能評価において共通なのは,いずれもサーバ(回線)が 1 人であり,複数の待ち行列が形成されることであ

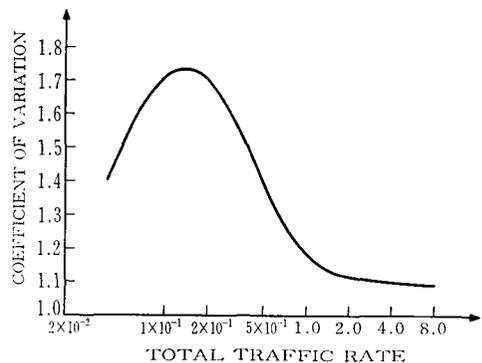


図 4 待ち時間の変動係数

る。見方を変えて、ある待ち行列からみればサーバが他の待ち行列をサービスするのはサーバの遊休時間であると解釈することができる。そのような理由から遊休のある  $M/G/1$  待ち行列に関する解析の結果の見直し、さらに新しいモデルの解析が盛んになりつつある。待ち行列理論としては非常に基本的なモデルであるために、2, 3年の間に多くの論文が発表され急速な進展がみられると思われる。たとえばこのモデルにサーバがアイドルの状態からサービスを開始するときに準備時間が必要な場合を組み込んだモデルが解かれつつある。あるいは全処理式、ゲート式、制限式処理規範に有限バッファを付加したモデル等が考察されている。

ランダム・アクセス方式でバッファを有する場合に關してはあまり結果がないために、このモデルを用いたアプローチも可能と思われる。

## 5. おわりに

本小文では、通信系における待ち行列問題のなかで最近の話題を、筆者らが興味をもって研究していることを中心に紹介させていただいた。少し視点が偏っている危険はあるが、そのぶん比較的新しいものを盛り込むことができたと思われる。

現時点において通信系に待ち行列理論を応用するさいの最大の難点の1つは客の同期の問題である。すなわち複数の決まった組合せの客が揃うのを待って、処理を開始するモデルである。この例は、並列処理、データベースシステム等に典型的に見られる。Timed Petri Net等を用いようとする試みがあるが、モデル化はできてもそれを解く手段は待ち行列理論と同じものであるので、本質的な改善にはなっていないようである。当面、飛躍的な研究の進展は望めないが、すでに若干の成果は報告されつつある。

## 参 考 文 献

[Ferg 85] M. J. Ferguson and Y. J. Aminetzah, "Exact Results for Nonsymmetric Token Ring Systems," *IEEE Transactions on Communi-*

- cations*, Vol. COM-33, No. 3, pp.223-231, 1985.
- [Fuhr 87] S. W. Fuhrman, "Inequalities for Cyclic Service Systems with Limited Service Disciplines, GLOBECOM '87, pp.182-186, 1987.
- [Takag 86] H. Takagi, "Analysis of Polling Systems," MIT Press, Cambridge, 1986.
- [Takag 87] H. Takagi, "A Survey of Queueing Analysis of Polling Models," *Data Communication Systems and Their Performance*, L.F.M. de Moraes, E. de Souzae Silva & L. F. G. Soares (editors), pp.277-295, North-Holland, 1988.
- [Takah 87] Y. Takahashi, Y. Matsumoto and T. Hasegawa, "Prodability Distributions of Delay and Interdeparture Time in Non-slotted CSMA/CD," *Local Communication Systems: LAN and PBX*, J.P. Cabanel, G. Pujolle and A. Danthine (editors), pp.423-435, North-Holland, 1987.
- [Taki 86] T. Takine, Y. Takahashi and T. Hasegawa, "Performance Analysis of a Polling System with Single Buffers and Its Application to Interconnected Networks," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol.SAC-4, No.6. pp.802-812, 1986.
- [Taki 87] T. Takine, Y. Takahashi and T. Hasegawa, "Analysis of an Asymmetric Polling System with Single Buffers," *Performance '87*, Brussels, pp.241-251, 1987.
- [Toba 82] F. Tobagi, "Distributions of Packet Delay and Interdeparture Time in Slotted ALOHA and Carrier Sense Multiple Access," *J. ACM.*, Vol.29, pp.907-927, 1982.
- [Wats 84] K. S. Watson, "Performance Evaluation of Cyclic Service Strategies-A Survey," *Performance '84*, E. Gelenbe (editor), pp.521-533, North-Holland, 1984.