累積カーブ活用のおすすめ

――在庫モデルの事例――

権藤　元

1.　まえがき

昨年6月のOR誌は創立30周年記念号として，「ORの図解」の特集があった．その中に「累積分布関数の図的利用」「パレート図とABC分析」「待ち行列と在庫」など累積カーブを活用する話題が紹介されている．ここでは，その落ち穂拾い的な話題として，在庫モデルに累積カーブを用いた事例を紹介しよう．

2.　在庫モデルの表現

普通，在庫モデルは，鋸型の図により説明されている（**図1**）．すなわち，図1は横軸に時間の経過をとり縦軸に在庫量をとって，入庫すると入庫の大きさだけ垂直に上昇し，その後，時間の経過とともに出庫されて，在庫は減少する状態を示している．

さて，これに対して累積カーブにより表現すると**図2**となる．図2は，横軸は図1と同じく時間の経過を示しているが，縦軸には入庫量・出庫（需要）量ともに累積した値を表示している．したがって，入庫累積を示すカーブは入庫にともなって垂直に上昇し，その他のときは水平に推移する．出庫累積（需要累積）を示すカーブは斜めに上昇し，需要の発生が時間の経過によって変化せず一定のときには直線となる．ここで，在庫はこの2つの累積カーブの縦軸の値の差として示される．

3.　最適ロットサイズ

在庫モデルにはルート公式といわれている有名な入庫の最適なロットサイズを求める公式がある．この公式はORのどのテキストにも出てくるもので，ORで使われる基本的な考え方を示しているといえよう．

ごんどう　はじめ　近畿大学
〒731-01 呉市広古新開5－1－3

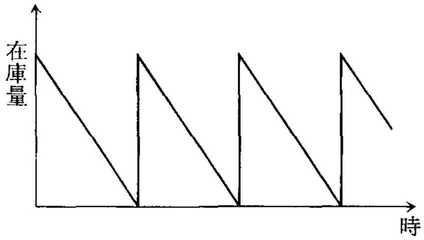

図1　在庫モデルの説明図

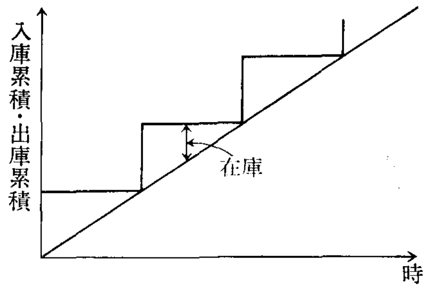

図2　累積カーブによる在庫モデル

このルート公式は，次のようにして導かれる．

いま，需要は単位時間にr発生し，入庫のロットサイズをQとする．在庫にかかわる費用として，単位時間当り，単位量毎にC_1の費用が，また，納入1回毎にC_2の費用（発注費といわれる）がかかるものとする．ここで，ある期間（O，T）について，コストを求めると

$$C_1QT/2+C_2rT/Q \qquad (1)$$

となる．ここに，第1項は平均在庫量$QT/2$にかかる在庫費用であり，第2項は納入回数rT/Qにかかる発注費である．

ここで，この期間の費用(1)式を最小にするQを求める．第1項と第2項の積を求めると

$$C_1C_2rT^2/2=\text{一定}$$

となることから，第1項と第2項を等しいとおいてQの値が求められる．

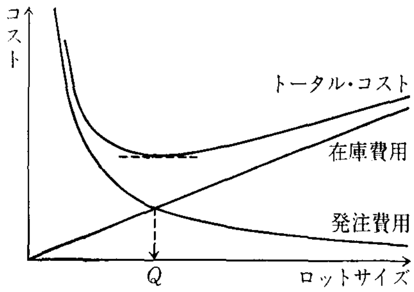

図 3　最適ロットサイズ

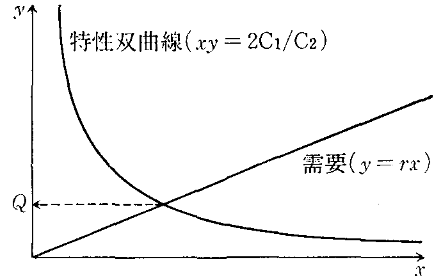

図 4　最適ロットサイズ（累積カーブによる）

よって

$$Q=(2rC_2/C_1)^{1/2} \qquad (2)$$

この(2) 式をルート公式という.

（注「面積一定の長方形の周の長さは正方形のときに最小となる」ということを用いている）

このことを**図3**により示すことが多い．図3は横軸をロットサイズQとし，縦軸をコストとすると第1項は垂線で，第2項は双曲線で示される．この2つの線の交点によりトータルコスト最小のQの値が求められることを示している.

さて，累積カーブではどうなるであろうか．**図4**は横軸に時間をとり縦軸に需要量をとってある．需要のカーブは直線（$y=rx$）として示される．これに，1つの双曲線（$xy=2C_2/C_1$ これを特性双曲線と呼ぼう）を描き，この両者の交点を求めるとこの交点の縦座標の値がQの値を示していることがわかる.

4.　需要の発生が一定でないとき

以上は単位時間に発生する需要rが一定の場合であったが，累積カーブの特徴はrが一定でない場合に発揮される．このことは「待ち行列と在庫」においても述べられているが，さらに補足しよう.

トータルの需要は判明していて需要の発生は最初が大きく次第に減少している場合を累積カーブで表わしたものが**図5**である．このケース　2，3の性質を調べてみよう.

図5の階段状の折れ線と需要の累積カーブとの間の斜線をつけた部分aが在庫を示している．この面積は直接は計測し難いが，この面積の変化は図5で打点してある階段状の図形bの変化としてとらえることができる．それは，需要の累積カーブと縦軸とトータルの需要一定の水平線とで囲まれた面積（$a+b$）は需要の累積カーブにより定まり，一定の値となるからである．したがって，階段状の図形bの部分を最大にすることが，在庫費用を最小にすることとなる．これが第1の性質である.

さて，発注回数を固定したときに，どの時点でどれだけ発注すれば良いかを考えることとする．図5において特に第i回目の発注に注目し，図6として考察しよう．ここに需要累積カーブ上の点P_{i-1},　P_i, P_{i+1}は縦座標

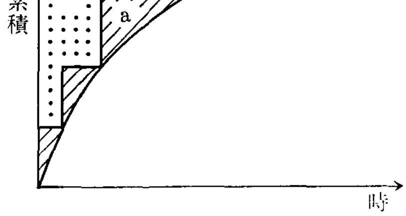

図 5　累積カーブ

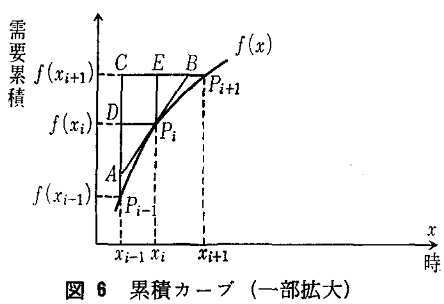

図 6　累積カーブ（一部拡大）

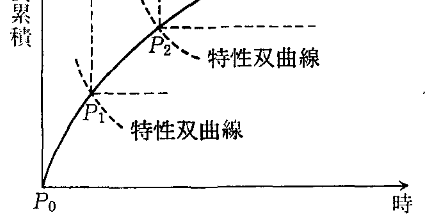

図 7　作図解法（ステップ1）

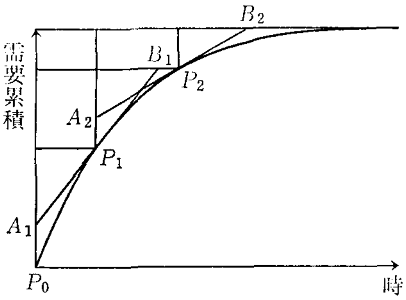

図 8 作図解法（ステップ２）

が第 $i-1$ 回目，第 i 回目，第 $i+1$ 回目の発注累積量に相当する（これらの点Pを発注点と呼ぼう）．

いま，発注点 P_{i-1}，P_{i+1} を固定して発注点 P_i を動かして CDP_iE の面積が最大になるときは，発注点 P_i における需要累積カーブの接線を AP_iB としたとき，発注点 P_i は直線 AB の中点（$AP_i=P_iB$）となっているという性質がある．これが第２の性質である．

略証　需要の累積カーブを $f(x)$，CDP_iE の面積を S とすると

$S=(x_i-x_{i-1})(f(x_{i+1})-f(x_i))$

S を x_i で微分してゼロとおくと，

$$f(x_{i+1})-f(x_i)-(x_i-x_{i-1})f'(x_i)=0 \qquad (3)$$

がえられる．これを用いると

$AD=(x_i)-f(x_{i-1})$

$=(x_i-x_{i-1})$　　接線であることより

$=f(x_{i+1})-f(x_i)$　　(3)式より

$=DC$

よって，D は AC の中点となり，P_i も AB の中点となる．（注 現実には現われないような特殊な累積カーブについての吟味は省略）

5. 作図解法の一事例

4 で述べた２つの性質を用いると，次に例示する需要累積カーブをもとに発注点を求め，１つの作図解法が得られる．

ステップ１（**図 7**）

(1) 累積需要カーブを描く

(2) 特性双曲線を透明な用紙（トレーシングペーパーあるいはＯＨＰのフィルム）作成する．

(3) 需要累積カーブと特性双曲線を重ねて交点をもとめる．この交点を P_1 とする．

(4) 次にこの交点 P_1 を新たに原点として再び需要累積カーブと特性双曲線を重ねその交点を P_2 とする．

(5) 以下，交点 P_n が最終需要に近づくまでこれを繰り返す．これにより，第１近似の発注点 P_1，P_2，....P_n と発注回数 n を求める．

ステップ２（**図 8**）

以上の第１近似を目安として，改めて，図８に示す作図により発注点を修正する．

(1) P_1 需要累積カーブ上の点

(2) A_1 P_1A_1 は需要累積カーブの接線（A_1P_0 は垂直）

(3) B_1 直線 A_1P_1 の延長上で $P_1A_1=P_1B_1$ となる点

(4) P_2 B_1 から水平線をひき需要累積カーブとの交点

(5) A_2 P_2A_2 は需要累積カーブの接線（A_2P_1 は垂直）

(6) B_2 直線 A_2P_2 の延長上で $P_2A_2=P_2B_2$ となる点

以下，最後の B 点が最終需要に一致するまで，P_1 の位置を修正しながら試行錯誤を繰り返す．この作業には，中央から両側に目盛りのある直線尺を用いると作業しやすい．

この作図解法は，以前「株式配当金の支払い基金設定」というテーマの検討にさいして使用したもので，発注回数が多くなると煩雑であるが，３，４回の発注までは実用可能である．

6. あとがき

ここでは，在庫モデルの事例を紹介したが，図形で表現することにより，基準化がしやすく（たとえば，最終需要を１とし，期間も０から１とするなど）直感を働かせながら考察をすすめられる利点がある．大いに活用していただきたい．なお，累積カーブは実務上有効で，それぞれその分野での累積カーブに特定の名称（たとえば，電力分野では需要のデュレーションカーブなど）がつけられていることが多いことを述べてむすびとする．

参考文献

［１］ 森村英典：在庫管理における最適発注量，オペレーションズ・リサーチ，**32**，6（1887）353-355

［２］ 森　雅夫：待ち行列と在庫，オペレーションズ・・リサーチ，**32**，6（1887）391-393

［３］ 若山邦紘：累積分布関数の図的利用，オペレーションズ・リサーチ，**32**，6（1887）393-395

［４］ 牧野都治：パレート図とＡＢＣ分析，オペレーションズ・リサーチ，**32**，6（1887）395-398