国家間関係の分析におけるグラフ理論からの接近

高橋　徹　埼玉大学大学院政策科学研究科（指導教官　刀根　薫教授）

1.　研究の目的

国家を取り巻く国際環境を評価するための定量的な尺度を定め，国家が起こす外交行動とその結果起こる国際環境の変化との関係について分析する．

2.　方　法　論

本研究においてはグラフ理論にもとづく Flament の均衡理論［1］を基礎に方法論を展開する．個々の国家を1つの「点」とし，2つの国家間の関係を「枝」とする．複数の枝を重複しないで繋いでできる輪を「閉路」と呼ぶ．2つの国家間の関係が友好的であれば，その枝は＋1の値を持ち，敵対的であれば－1の値を持つものとする．たとえば，経済援助，軍事援助などの条約締結，国交樹立などの行動を＋1の枝と評価し，軍事紛争，国交断絶などの関係を－1の枝と評価する．閉路を構成している個々の枝の値をすべて乗じた値が＋1の場合はその閉路は均衡とし，またその値が－1の場合はその閉路は不均衡とする．

さらに，システムの均衡状況を表わす指数として均衡度 R を次式により定義する．(Cartwright and Harary［2］)

$$R=\sum_i\{w(i)\cdot C^+(i)\}/\sum_i\{w(i)\cdot C(i)\}$$

ただし，i　閉路の長さ

$w(i)$　重み付け関数

$C^+(i)$　長さ i の正の閉路数

$C(i)$　長さ i の閉路数

研究対象とする国の均衡度を時系列で追跡し，国が何らかの行動を起こした結果 R が上昇した場合は，その行動は合理的であり，逆の場合は合理的ではないと評価される．さらに，システム全体に含まれる閉路数 C を用いて上記の均衡度の式に当てはめ，それが時間に対する増加関数のときはシステム全体は自律的であり，逆の場合は自律的ではないと評価される．

また，均衡度を時系列で追跡するため，均衡度の標準化を行なう．標準化された均衡度，R' は次式による．

$$R'=\frac{1}{2}+\beta\cdot(R-E(R))/\sigma(R)$$

ただし，$E(R)=R$ の分布の平均値

$\sigma(R)=R$ の分布の標準偏差

$\beta=$ 適当な定数

さらに，感度分析として，次の分析を併せて行なう．

国家 j および k 間の枝の値を $s(j,k)$ とし，ベクトル $\boldsymbol{a}_k$　$(\boldsymbol{a}_k=(s(1,k),s(2,k),\cdots,s(n,k))^t)$ を国家 k の均衡度 R_k の説明変数に導入して，$R_k=R_k(t,\boldsymbol{a}_k)$ とすれば，R_k の時系列変化は次のように表わされる．

$$\begin{aligned}&dR_k(t,\boldsymbol{a}_k)/dt\\&=\partial R_k/\partial t+(\partial R_k/\partial \boldsymbol{a}_k)^t(d\boldsymbol{a}_k/dt)\\&=\partial R_k/\partial t+\sum_j\{(\partial R_k/\partial s(j,k))(ds(j,k)/dt)\}\end{aligned}$$

上式の右辺第2項は，国家 k が時点 t において起こした行動を，仮に起こさなかった場合を想定し，その場合の均衡度に対する実際の均衡度との差を表わしている．本研究では，左辺の値を導関数による値，右辺第2項の値を偏導関数による値と称することとし，結果を比較分析する．

なお，各国家の均衡度の変化は，個々の行動の1つ1つを吟味するのではなく，それらを国別にみたときに均衡度を上昇させた行動の数の全体の行動の数に占める比率（これを得点と呼ぶ）を評価の尺度とする．

3.　分析の対象

インドシナおよび中東の各地域において，次の紛争等が生起した期間および関係した国々を分析の対象とし，上のモデルに適用する．

事例1：インドシナ

ベトナム戦争，ベトナム・カンボジア紛争，中越紛争，中ソ紛争，およびカンボジア内戦の期間1954～1980，対象国家10か国．

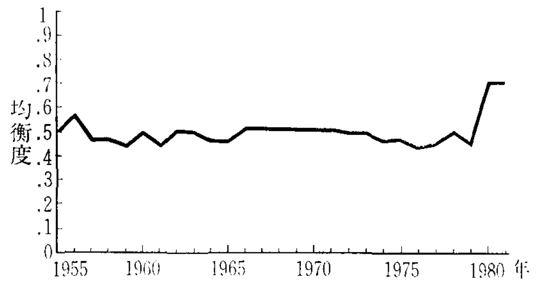

図 1 インドシナ全体の均衡度の変化

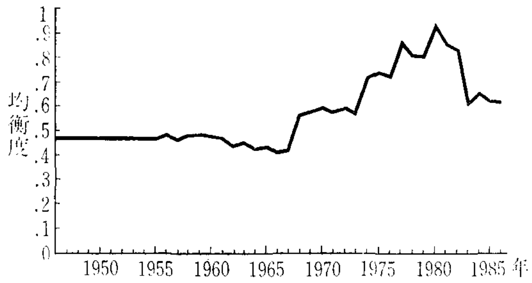

図 2 中東全体の均衡度の変化

事例２：中東

中東戦争（パレスチナ戦争(イスラエル独立戦争)，シナイ戦争，６日間戦争，10月戦争，キャンプ・デービッド協定)，イラン・イラク戦争，および米・イラン紛争の期間1945～1985，対象国家25か国.

4. 計算結果およびその解釈と吟味

(1) インドシナ

システム全体の均衡度（**図１**）は1955～1979の間はほとんど変化がない．しかし，1980年以降システムの均衡度は大きく上昇している．これは，カンボジアのヘン・サムリン政権を承認する国が増えたことによるものである．

また，各国の得点を見ると，南ベトナムおよび北ベトナムの２つの国については，北ベトナムは導関数で0.6～0.8，偏導関数で0.8～1.0ときわめて高いのに比べ，南ベトナムは導関数で0.1程度，偏導関数で0.5と低い．現実にベトナム戦争は北の勝利により終結した．その他の国々に関しては，おおむね0.6～0.8の範囲にあるが，例外的に旧時代のカンボジアは0.4と低い．そのカンボジアは現在２つに分裂して内戦・混乱状態にある．

(2) 中　東

システム全体の均衡度（**図２**）は1967～1976の間に急激に上昇している他はほとんど変化はない．この時期は第３次中東戦争から第４次中東戦争を経て，キャンプ・デービッド協定が結ばれるまでの期間である．またこの時期には中東各国は競って相互防衛協定の締結を行なっている．すなわち，不穏な情勢の中で対立・均衡という図式を強めてきたと言える．その後，1979年以降は均衡度は下降しており，エジプト，イスラエル間の和平協定後のシステム内の乱れが結果に反映されている．

また，各国の得点を見ると，標準化をしない場合は，導関数による値は偏導関数による値よりも低くなる傾向がある．特に米国およびソ連の場合において２つの値の差が大きく出ている．しかし，標準化を行なった場合はこの２つの値の関係は逆転するか，ほぼ同等の値となる．計算結果は，中東におけるこれら超大国の外交行動について，それほどよい選択になっていないという事実を示唆している．

5. モデルと現実

２つの事例の分析結果から，モデルの表現機能について，いくつかの暫定的な仮説を提示する．

第１に，将来の国家の存亡を予測する手段となる．インドシナの事例における南ベトナム，また旧カンボジアは得点がきわめて低い．南ベトナムは敗戦による国の合併，旧カンボジアは内戦による分裂と，いずれも現在はその国家はない．

第２に，国際紛争の終結を予想する手段となる．インドシナの事例において，南ベトナムの得点はきわめて低く，北ベトナムの得点はきわめて高い．もし，紛争当事国の間に明らかに得点の差に違いがあれば，紛争の最終的な勝敗についての示唆を得ることができるものと考えられる．

第３に，外交政策の地域性を特徴づけるための尺度となる．中東の事例における，各国の得点の感度分析および標準化による傾向の違いは地域性を分析するための手がかりとなろう．さらに多くの地域を対象に分析を積み重ねてゆくことにより，各地域の特徴を分類することが可能であると考えられる．

参 考 文 献

［１］ Claude Flament ; APPLICATIONS OF GRAPH THEORY TO GROUP STRUCTURE ; PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, N.J., 1963

（山本国雄訳「グラフ理論と社会構造」1974, 東京, 紀伊国屋書店 pp. 111-158)）
[2] Cartwright, D. and F. Harary ; "Structural balance: a generalization of Heider's theory" ; Psych Rev. 63, pp. 277-293 ; 1956

学生論文賞受賞論文 要約

線形計画問題に対する新解法について
—内点法の開発と評価—

吉瀬　章子　東京工業大学大学院　理工学研究科経営工学専攻（指導教官　森　雅夫助教授）

1. はじめに

1984年に Karmarkar[3] が線形計画問題の新しい解法として，実行可能領域の内部に最適解に収束する点列を主成する解法（内点法）を提案してから2年余りが経つ．この間にさまざまな新しい内点法が提案された．本論文では，一見異質にみえるこれらの内点法の探索方向が各々たった2つのベクトルの結合として表わされることを示し，次に主問題と双対問題の解の点列を同時に生成する新しい内点法を提案する．また線形計画問題の解法として内点法がどのように評価できるか，今後どのようなアプローチが行なわれるか等についても述べる．

2. 従来の内点法が用いる探索方向の性質

これま提案された代表的な内点法として小島［4］, Iri, Imai [2], Adler, Karmarkar, Resende, and Veiga[1], Renegar[8], Yamashita[10]を挙げておく．これらの内点法では，実行可能内点の点列 $\{x^k\}$ を，

$x^{k+1}=x^k-\alpha d$, $\alpha\in R$：ステップサイズ,

$d\in R^n$：探索方向ベクトル．

として生成している．Yamashita [10] は，彼の内点法と Iri,, Imai [2] による内点法の探索方向 d が，ともに同じ2つのベクトルの，ある線形結合で表わされることを指摘した．本論文ではさらに前述の内点法すべてがこの性質を持つことを示している．まず線形計画問題の標準形，

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}) & \text{minimize} & c^T x \\
 & \text{subject to} & Ax=b,\ x\geqq 0, \\
 & & A\in R^{m\times n},\ c\in R^n,\ b\in R^m,\ x\in R^n,
\end{array}
$$

を対象とし，前記すべての内点法の仮定を満たすとする．このとき各内点法によって得られる内点 x^k での探索方向 d はいずれも $d1$, $d2$; $d1=-XP_{AX}(Xc)$,

$$d2=XP_{AX}e,\ X=\mathrm{diag}\{x^k j,\ j=1,2,\cdots,n\},$$

$$P_{AX}=I-XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX,$$

の線形結合として算出される．すなわち前述の内点法は皆，“目的関数値を減少させる方向”($d1$) と “実行可能領域の内部に引き戻そうとする方向”($d2$) を組み合せて，非負制約か受ける影響も考慮した効果的な探索方向を用いていることがわかる．

3. 射影変換にもとづく主双対内点法

以降では新たな内点法を開発する．本論文で提案する内点法は，各反復で（主問題とともに）双対問題の変数の値も更新する，新しい内点法(主双対内点法)である．

以下では前述の問題(P)とその双対問題にスラック変数 z を導入した問題(D),

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{D}) & \text{minimize} & b^T y \\
 & \text{subject to} & A^T y+z=c,\ z\geqq 0, \\
 & & y\in R^m,\ z\in R^n,
\end{array}
$$

を併せた主双対問題(PD),

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{PD}) & \text{maximize} & c^T x-b^T y(=x^T z) \\
 & \text{subject to} & Ax=b,\ x\geqq 0, \\
 & & A^T y+z=c,\ z\geqq 0,
\end{array}
$$

を対象とし，以下の2つを仮定する．

- 問題(PD)のある実行可能内点 (x^0, y^0, z^0) : $Ax^0=b$, $x^0\geqq 0$, $A^T y^0+z^0=c$, $z^0\geqq 0$, が存在して既知,
- rank $A=m$,

本節では主双対内点法のひとつとして，問題(PD)に改訂 Karmarkar 法と同じ射影変換を用いた解法を提案する．上記の仮定から問題(PD)の最適値は0であるので，この解法が多項式オーダーの解法であること，改訂

Karmarkar 法が必要とする下界値の更新が不必要であることがわかる．このように最適値が自明であることは主双対内点法の長所である．一方，この解法と問題(P)に最適値未知として改訂 Karmarkar 法を適用した場合を比べると，問題(PD)の変数の数は問題(P)の約2倍であり，ともに一反復当りの計算量が $O(n^3)$（nは変数の数）であるので，約8倍の計算量を要するおそれがある．しかし本論文では工夫により高々2倍で抑えられることを示している．一反復当りの計算量は増えるが，最適値が既知であるので反復回数は減少すると予想される．

4. 内点法における Analytic Center の性質

前節の仮定に加え主問題（双対問題）の最適値の上界値下界値）が既知ならば，主問題（双対問題）の制約に目的関数値が上界値以下（下界値以上）という制約を加えた実行可能領域が非空有界凸多面体であることがわかる．Sonnevend［9］はこの様な多面体内部に analytical centre（ACと略）と呼ぶ“中心”の概念を定義し，その解析を行なっている．本論文では主双対問題(PD)に対するACを，問題(PD)の制約に，主問題と双対問題の目的関数値の差が θ 以下，

$$c^T x - b^T y + \mu (= x^T z + \mu) = \theta, \quad \mu \geqq 0, \quad \mu \in R,$$

という制約を加えた上で，次の関数，

$$\sum_{j=1}^{n} \ln x_j + \sum_{j=1}^{n} \ln z_j + \ln \mu$$

を最大化させる点(x^*, z^*)として定義する．主問題(P)，双対問題(D)に対しても同様にACを定義することができる．このとき主双対問題(PD)のACは以下の性質を持つ．

1. x^* は主問題(P)の，z^* は双対問題(D)のACである．
2. 2節で述べた各内点法での探索方向 d は，x^* 上ですべて一致する．
3. 各ACから上記の方向に進むことで，必ず目的関数値を比率 $(1-n^{1/2})$ で減少させることができる．
4. 主双対実行可能内点(x, y, z)が主双対問題(PD)のACである必要十分条件は，ある正数 μ が存在して，

$$x_j \cdot z_j = \mu, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

が成り立つことである．

Megiddo［7］は異なる方法で同様な内点を定義し上記の1および4と同じ結果を導出している．以上の性質はACの近傍の点でもある程度保存される．特に上記の4は，従来非線形関数を用いて評価した実行可能内点とACの距離を，各要素の積 $x_j \cdot z_j$ のばらつきで評価できることを示しており，このことを用いて新たな主双対内点法を開発することができる．

5. おわりに

前節で述べた Analytic Center の持つ性質をもとに，本論文の後これまでに，$O(n^4 L)$の主双対内点法（Kojima, Mizuno, and, and Yoshise[5]），さらに線形相補性問題まで拡張した$O(n^3 L)$の解法（Kojima, Mizuno, and Yoshise［6］）が考えられている．（ここでLは与えられた問題の総入力ビット数を示す．）

内点法についての研究は，今後も線形計画問題に関する新たな理論をもたらすと予測できる．特に，さまざまな内点法の探索方向が実行可能領域内に作るベクトル場の解析は，理論的に優れた内点法を開発する上で意義がある．しかし，内点法が実用性の高い解法であるかどうかという点は未だに明確ではない．数値実験をともなった実際の計算についての研究は，今後の最大の課題である．

参考文献

［1］ I. Adler, N. Karmarkar, M. G. C. Resende, G. Veiga, “An Implimentation of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming”, Working Paper, OR Center, California Univ. (1986).

［2］ M. Iri, H. Imai, “Multiplicative Penalty Function Method in linear Programming-Another ‘New and Fast’ Algorithm”, *Proc. of 6th MPS of Japan*, Tokyo (1985), 97-120.

［3］ N. Karmarkar, “A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming”, *Combinatorica 4* (1984), 373-395.

［4］ 小島政和，“Karmarkar 法の改良について”，第6回数理計画シンポジウム（1985），243-271.

［5］ M. Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise, “A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming”, Res. Rept. B-188, Dept. of Information Sciences, T. I. T. (1987).

［6］ M. Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise, “A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems”, Res.

Rept. B-193, Dept. of Information Sciences, T. I. T. (1987).

[7] N. Megiddo, "Pathways to the Optimal Set in Linear Programming", *Proc. of 7th MPS of Japan* (1986), 1-35.

[8] J. Renegar, "A Polynomial-Time Algorithm, Based on Newton's Method, for Linear Programming", MSRI 07118-86, MSRI (1986).

[9] G. Sonnevend, "An 'analytical centre' for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming", Proc. 12th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Budapest (1985).

[10] H. Yamashita, "A Polynomially and Quadratically Convergent Method for Linear Programming", Working Paper, Mathematical Systems Institute, Inc. (1986).