企業体の効率性分析手法

——DEA 入門 (3)——

刀根　薫

5.　生産関数に関する想定と DEA 変更

前に第3節で注意したように，DEA では DMU の入力と出力の対が凸錐をなすという仮定を採用している．入力と出力の関係をごく一般的に“生産関数”と呼ぶことにするが，この節では生産関数の別の型を想定しそれに対するDEAの変更について考察する．

5.1　活動の凸錐性

第3節では活動についてA1)，A2)，A3)の3つの仮定をした．そのうちA2)，A3)は比較的無難な仮定であるがA1)については非現実的であるという指摘もなされている．そこで，ここではA1)を除きA2)，A3)のみを仮定してみる．すなわち，

A2)　$(x_1,y_1)\in T, (x_2,y_2)\in T$ ならば $0\leqq\lambda\leqq 1$ を満たす

任意の λ に対して

$$((1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\ (1-\lambda)y_1+\lambda y_2)\in T \quad (5.1)$$

A3)　$(x,y)\in T$ ならば $x_1\leqq x, y_1\geqq y$ なる任意の x_1, y_1 に対して $(x_1,y_1)\in T$　(5.2)

いま与えられたデータ (x_j,y_j) $(j=1,\cdots,n)$ に対して A2)，A3)を適用するならば次のように言い替えることができる．

$$(x_j,y_j)\in T \ (j=1,\cdots,n)$$

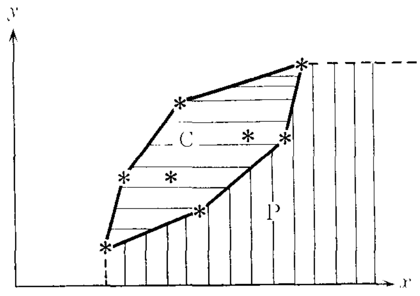

図 3　領域 T

であるとき，

$$x\geqq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \quad (5.3)$$

$$y\leqq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j \quad (5.4)$$

で表現される任意の x，y は T に属する．ここに

$$\lambda_j\geqq 0 \ (j=1,\cdots,n) \quad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \quad (5.6)$$

とする．(**図3参照**)

図3において与点の凸結合からなる領域 C と領域 P の和が T である．

5.2　DEAの変更

上の仮定に対応するDEAを行なうためにまず次の入力可能集合 $L(y)$ を定義する．

$$L(y)=\{x\,|\,(x,y)\in T\} \quad (5.7)$$

すなわち $L(y)$ は出力 y を生み出す可能性のある入力 x の集合である．

いま，ある $\mathrm{DMU}(x_{j_0},y_{j_0})$ に対して $L(y_{j_0})$ を考える．この $L(y_{j_0})$ の中には，h をスカラーとし

とね　かおる　埼玉大学　大学院　政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保 255

てhx_{j_0}という形のものが含まれている．実際$h=1$とすればx_{j_0}そのものである．

そこで

$$hx_{j_0} \in L(y_{j_0}) \tag{5.8}$$

の中でhを最小にするものを探す．もし，その最小値が，

$$h^*=1 \tag{5.9}$$

ならば(x_{j_0}, y_{j_0})はD効率的であり

$$h^*<1 \tag{5.10}$$

ならば非効率であると定義する．

以上の考え方は次のＬＰに定式化される．

〈ＬＰＤＣ〉 目的関数 $\min\ \omega=h$ (5.11)

制約 $hx_{j_0}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \geqq 0$ (5.12)

$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j \geqq y_{j_0}$ (5.13)

$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ (5.14)

$\lambda_j \geqq 0 (j=1,\cdots,n).$ (5.15)

このＬＰの双対問題は次のとおりである．

〈ＬＰＣ〉

目的関数 $\max\ z=\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj_0}-u_0$ (5.16)

制約 $\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}-u_0 \leqq 0$

$(j=1,\cdots,n)$ (5.17)

$\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij_0}=1$ (5.18)

$u_r, v_i \geqq 0$

$(r=1,\cdots,s:i=1,\cdots,m)$ (5.19)

u_0は符号制約なし (5.20)

〈ＬＰＣ〉は次の分数計画問題〈ＦＰＣ〉と等価である．

〈ＦＰＣ〉

目的関数 $\max h_{j_0}=\dfrac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj_0}-u_0}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij_0}}$ (5.21)

制約 $\dfrac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-u_0}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}} \leqq 1 (j=1,\cdots,n)$ (5.22)

$u_r \geqq 0\ (r=1,\cdots,s)$ (5.23)

$v_i \geqq 0\ (i=1,\cdots,m)$ (5.24)

u_0は符号制約なし (5.25)

ここで，u_r, v_rの非負条件を正条件にする．そのために無限小正数εを導入し，次の〈ＬＰＣ'〉と，その双対問題〈ＬＰＣＤ'〉を得る．

〈ＬＰＣ'〉

目的関数 $\max\ z=\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj_0}-u_0$

制約 $\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}-u_0 \leqq 0\ (j=1,\cdots,n)$

$\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij_0}=1$

$u_r \geqq \varepsilon,\ v_i \geqq \varepsilon$

u_0は符号制約なし

〈ＬＰＤＣ'〉

目的関数 $\min\ w=h-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^{+}+\sum_{r=1}^{s}s_r^{-}\right)$

制約 $hx_{ij_0}-\sum_{j=1}^{n}x_{ij_0}\lambda_j-s_i^{+}=0\ (i=1,\cdots,m)$

$\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-s_r^{-}=y_{rj_0}\ (r=1,\cdots,s)$

$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j, s_i^{+}, s_r^{-} \geqq 0$

これらの定式化が従来のＤＥＡと異なる点は自由変数u_0の導入である．このことにより仮定A1)が除去される．効率的フロンティアの定義やそれにもとづく考察は従来のＤＥＡの場合と同様に展開することができる．

5.3 例題2

１入力，１出力の次の例を考察する．

表 3 例題2

j	1	2	3	4	5	6
x_j	1	2	2	3	4	4
y_j	2	4	6	2	5	7

(a) $j_0=1$の場合

〈ＬＰＣ'〉は次の通り．

$\max\ z=2u-u_0$

制 約 $v=1$

$2u-u_0-v \leqq 0$ $4u-u_0-2v \leqq 0$

$6u-u_0-2v \leqq 0$ $2u-u_0-3v \leqq 0$

$5u-u_0-4v \leqq 0$ $7u-u_0-4v \leqq 0$

$u \geqq \varepsilon \qquad v \geqq \varepsilon$

最適解 $u^*=1/4,\ v^*=1,\ u_0^*=-1/2$

$z^*=1$

よってDMU 1はD効率的である．ただし最適解は退化しており，$-1<u_0^* \leqq -1/2$ の範囲内で $u^*=(u_0^*+1)/2$ という関係で変化する．

(b) $j_0=2$ の場合

〈LPC'〉は次の通り．

$\max z=4u-u_0$

制約 $2v=1$

他の制約は(a)の場合と同じ．

最適解 $u^*=1/8,\ v^*=1/2,\ u_0^*=-1/4$

$z^*=3/4$

よってDMU 2はD非効率的である．

このとき〈LPDC'〉は次の通りである．

$\min w=h-\varepsilon(s^++s^-)$

制約 $2h-(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4+4\lambda_5+4\lambda_6)$

$-s^+=0$

$(2\lambda_1+4\lambda_2+6\lambda_3+2\lambda_4+5\lambda_5+7\lambda_6)$

$-s^-=4$

$\sum_{j=1}^{6}\lambda_j=1,\ \lambda_j \geqq 0,\ s^+ \geqq 0,\ s^- \geqq 0$

最適解 $\lambda_1^*=1/2,\ \lambda_3^*=1/2$

他の $\lambda_j,\ s^+,\ s^-$ は0

$h^*=3/4$

この場合効率的フロンティアは

$E(\mathrm{DMU}\,2)=\{\mathrm{DMU}\,1,\ \mathrm{DMU}\,3\}$

であり，効率的フロンティアの点

$1/2*\mathrm{DMU}\,1+1/2*\mathrm{DMU}\,3$

の入力を4/3倍したものがDMU 2であることがわかる．逆の見方をすれば，DMU 2の入力を3/4倍したならばDMU 2は効率的フロンティアに達することがわかる．

(c) $j_0=3$ の場合

〈LPC'〉は次の通り．

$\max z=6u-u_0$

制約 $2v=1$

他は(a)と同じ

最適解 $u^*=1/6,\ v^*=1/2,\ u_0^*=0,\ z^*=1$

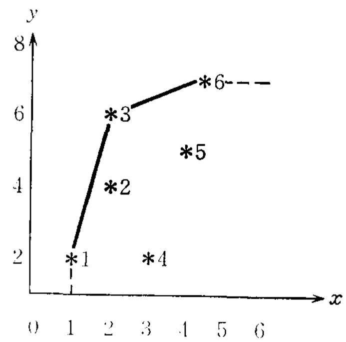

図 4 例題2

ただし最適解は退化しており，

$-1/4 \leqq u_0^* \leqq 5$

の範囲内で

$u^*=(u_0^*+1)/6$

の関係により変化する．

(d) $j_0=6$ の場合

〈LPC'〉は次の通り．

$\max z=7u-u_0$

制約 $4v=1$

他は(a)と同じ

最適解 $u^*=1/2,\ u_0^*=5/2,\ v^*=1$

$z^*=1$

最適解は退化しており，

$5/2 \leqq u_0^* \leqq \infty$

の範囲内で

$u^*=(u_0^*+1)/7$

の関係により変化する．

DMU 6はD効率的である．

図 4に例題2の入出力を図示する．

効率的フロンティアはDMU 1，DMU 3，DMU 6が属しており他は非効率である．

もし生産関数の仮定をA1)，A2)，A3)とすれば，DMU 3のみが効率的で他はすべて非効率と判定されることに注意する．

6. 規模の効率性に関する考察

前節で行なった議論の延長上で規模の効率性に関する考察を試みる．ここでは効率的フロンティ

アにある活動 $(x_E,\ y_E)$ を対象とする．すなわち

$$\max z=\sum u_r y_{rE}-u_0$$

$$\text{制約}\quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}-u_0\leqq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{iE}=1$$

$$u_r\geqq\varepsilon,\ \ v_i\geqq\varepsilon$$

の最適解を $u_r^*,\ v_i^*,\ u_0^*,\ z^*$ とするとき

$$z^*=1$$

であるとする．

ここで δ を非常に小さい数として，点 $P_\delta=((1+\delta)x_E,\ (1+\delta)y_E)$ を考えるとこの点は活動 $(x_E,\ y_E)$ にきわめて近い点である．この点が活動の集合に属するか否かでDMU E の規模の効率性を次のように定義する．

［定義３］

(a) $\delta^*>0$ が存在し，$\delta^*>\delta\geqq 0$ である任意の δ に対して $P_\delta\in T$ でありかつ，$-\delta^*<\delta<0$ であるどの δ に対しても $P_\delta\notin T$ であるときDMU Eは規模の効率性が増加型であるという．

(b) $\delta^*>0$ が存在し，$(bi)\delta^*>|\delta|$ であるどんな δ に対しても $P_\delta\in T$ であるか又は，$(bii)\delta^*>|\delta|>0$ であるどんな δ に対しても $P_\delta\notin T$ であるとき，DMU E は規模の効率性が一定であるという．

(c) $\delta^*>0$ が存在し，$\delta^*>\delta>0$ であるどんな δ に対しても $P_\delta\notin T$ でありかつ，$-\delta^*<\delta\leqq 0$ であるどんな δ に対しても $P_\delta\notin T$ であるとき，DMU Eは規模の効率性が減少型であるという．

上のように定めた規模の効率性は〈ＬＰＣ'〉の最適解における u_0^* の値と関係することが以下の議論からわかる．

一般にDMU Eに関する〈ＬＰＣ'〉の最適解は退化している場合が多いので u_0^* の値はユニークには決まらない．そこで最適解における u_0^* の最小値を $\underline{u}_0^*$ とし，最大値を $\bar{u}_0^*$ とする．そのとき次の定理が成立する．

［定理 6.1］

D効率的なDMU Eに関して，

(A) $\underline{u}_0^*<\bar{u}_0^*\leqq 0$ または $\underline{u}_0^*=\bar{u}_0^*<0$ ならばDMU Eは規模の効率性が増加型である．

(B) $\underline{u}_0^*<0<\bar{u}_0^*$ または $\underline{u}_0^*=\bar{u}_0^*=0$ ならばDMU Eは規模の効率性が一定でである．

(C) $0\leqq\underline{u}_0^*<\bar{u}_0^*$ または $0<\underline{u}_0^*=\bar{u}_0^*$ ならばDMU Eは規模の効率性が減少型である．

それぞれの場合について逆も成立する．

（証明）

まず(a)，(b)，(c)と(A)，(B)，(C)がそれぞれ三者択一的であることに注意する．

(a)＝＞(A)の証明：

$\delta^*\geqq\delta>0$ である δ に対して $P_\delta\in T$ であることから

$$(1+\delta)y_E^T u^*-(1+\delta)x_E^T v^*-u_0^*\leqq 0 \tag{6.5}$$

$(x_E,\ y_E)$がD効率的であることから

$$y_E^T u^*-x_E^T v^*-u_0^*=0 \tag{6.6}$$

よって

$$\delta(y_E^T u^*-x_E^T v^*)\leqq 0 \tag{6.7}$$

である．ここで $\delta>0$ に注意すれば

$$y_E^T u^*-x_E^T v^*\leqq 0$$

であるが，(6.6)より

$$\bar{u}_0^*\leqq 0 \tag{6.8}$$

を得る．

次に，$-\delta^*<\delta<0$ であるどの δ に対しても $P_\delta\in T$ であることと，T の凸性から

$$(1+\delta)x_E\geqq\sum\lambda_j x_j \tag{6.9}$$

$$(1+\delta)y_E\geqq\sum\lambda_j y_j \tag{6.10}$$

$$\sum\lambda_j=1 \tag{6.11}$$

$$\lambda_j\geqq 0\ (^\forall j) \tag{6.12}$$

には，$\delta<0$ である解 (λ,δ) は存在しない．このことに非斉次 Farkas の定理（二者択一の定理）を適用すると，

$$-x_E^T v+y_E^T u-u_0=0 \tag{6.13}$$

$$-x_j^T v+y_j^T u-u_0\leqq 0\ (j=1,\cdots,n) \tag{6.14}$$

$$v^T x_E=1 \tag{6.15}$$

$$v\geqq 0,\ u\geqq 0 \tag{6.16}$$

には

$u_0<0$ (6.17)

である解が存在することがわかる．この解を$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_0)$とすれば，これは〈LPC〉の最適解である．さらに$(u^*, v^*, u_0^*)$と$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_0)$の凸結合の点で，

$v \geqq \varepsilon \cdot 1, u \geqq \varepsilon \cdot 1 (1=(1, \cdots, 1)^T \in R^n)$ (6.18)

を満たすのが必ず存在するので，〈LPC'〉の最適解の中には

$u_0<0$ (6.19)

を満たすものが必ず存在する．

(6.8)と(6.19)より(A)が導かれる．

まったく同様の議論で(c)から(C)が導かれる．

(b)＝＞(B)の証明：

(bi)の場合，(a)(c)の場合と同じ論法より

$u_0^*=\underline{u}_0^*=\bar{u}^*=0$ (6.20)

を得る．

(bii)の場合，系(6.9)(6.10)(6.11)(6.12)にはδ<0を満たす解が存在しないので，再び二者択一の定理を用いて

$u_0<0$

である解が存在することがわかる．またδ>0を満たす解も存在しないので

$u_0>0$

ある解が存在することがわかる．よって(B)が導かれた．逆が成立することは，(a)，(b)，(c)と(A)，(B)，(C)がそれぞれ三者択一的であることから明らかである．

(Q．E．D．)

前節の例題2において，

(1) $j_0=1$は，$\bar{u}_0^*=-1/2<0$であるから規模の効率性は増加型である．

(2) $j_0=3$は，$-1/4=\underline{u}_0^*<0<\bar{u}_0^*=5$であるから規模の効率性は一定である．

(3) $j_0=6$は$0<5\frac{1}{2}=\underline{u}_0^*$であるから規模の効率性は減少型である．