

# 小修理 (minimal repair) を仮定しない 取り替え問題の研究

鈴木 康介 東京工業大学大学院 総合理工学研究科システム科学専攻 指導教官 森村英典教授

## 1. はじめに

本論文は経時劣化する修理系の取替え問題を論じる。過去、この分野の研究においては多くのものが故障時に小修理を行なうと仮定し、モデルを分析している。(ここでいう小修理とは修理後のシステムの故障率を故障直前のものに戻すようなものを指す。)故障の計数過程はこの仮定により非斉次のポアソン過程となり、解析が容易になることが、多く採り入れられた理由であるが、その妥当性については論じたものがない。そこで、ここでは修理を小修理と仮定せず、修理後の故障率はシステムの履歴に依存するものとして、一般化された再生過程〔2〕を用いてモデル化する。この時の最適政策(取替え時期)、期待コストを小修理を採用したモデルと比較することで、この仮定で評価し、それが妥当と思われるケースを考慮する。また後半では前述の一般化がどのようなモデルに適用可能であるかを検討する。

以下、説明のため記号を定めておく。

$\{X_i\}$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ): 故障間隔

ただし、 $X_1$  は取替えから最初の故障まで。

$N(t)$ :  $t$ までの故障回数。(counting process)。

$F(t)$ : 新システムの寿命分布 (Life time distribution)。

$f(t) : \left( = \frac{d}{dt} F(t) \right), r(t) : \left( = \frac{f(t)}{1-F(t)} \right)$  故障率。

## 2. 周期的予防取替え政策における期待コスト

初めに、ここで考える保守行動は以下2つと定める。

(1) 決められた周期における予防取替え、システムは新品となる。

(2) 故障時における‘一般的な’修理

(ただし(1), (2)に要する時間は無視できるものとする)

この方策は Policy II と呼ばれ〔1〕, 取替えコスト  $C_0$ ,

修理コスト  $C_1$  を与えれば、単位時間当りの期待コスト  $C(T)$  は、 $C(T) = \{C_0 + E[N(T)] \cdot C_1\} / T$  で表わされる。

上記の一般的な修理を定義するため、実年齢  $S_n$  (real age), 有効年齢  $\hat{S}_n$  (virtual age) の概念を導入する。

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \hat{S}_n = \sum_{k=1}^n A_k X_k \quad (1)$$

(1)で表わされるように  $S_n$  は過去の故障間隔の和、 $\hat{S}_n$  は各故障間隔での消耗、故障の影響、修理の成功度を考慮した変数  $A_k$  で重みづけした和である。つまり  $S_n$  が経過時間を表わし、 $\hat{S}_n$  が履歴を反映した年齢を表わす。

これを用いて、一般的な修理をほどこすとは修理後の故障率が次のものになることであると定義する。

$$r\{\hat{S}_{N(t)} + (t - S_{N(t)})\} = r\{t - (S_{N(t)} - \hat{S}_{N(t)})\} \quad (2)$$

これは時刻  $t$  において、前回の故障時点での有効年齢  $\hat{S}_{N(t)}$  に以後の経過時間  $t - S_{N(t)}$  を加えたと同じだけの期間、稼動を続けたシステムと同じ故障率をもつという意味である。これは時刻  $t$  におけるシステムは過去の修理で  $S_{N(t)} - \hat{S}_{N(t)}$  だけ若返っている(負ならば余分に消耗している)と見ることもできる。(2)式右辺)

いま簡単のため、 $A_k = a$  (for all  $k$ ) とすれば、故障率の期待値  $h(t) = E[r\{t - S_{N(t)} + \hat{S}_{N(t)}\}]$  は、

$$h(t) = q(t|0) + \int_0^t h(x)q(t-x|x)dx \quad (3)$$

を満たす〔2〕。ここで、

$$Q(x|y) = \frac{F(x+ay) - F(ay)}{1 - F(ay)}, q(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x|y)$$

である。(3)式は一般化された再生方程式と呼ばれ、一般化された再生密度  $h(t)$  は、 $Q(x|y)$ , つまり時刻  $y$  で最後の故障を生じたシステムの寿命分布と、上記積分方程式で関係づけられる。これより故障回数の期待値  $E[N(t)]$ , すなわち一般化された再生関数  $H(t)$  を求めるには、(3)式を解き、 $H(t) = \int_0^t h(x)dx$  を計算することになる。しかし(3)式はその積分核が通常の再生方程式とは異なるため、ラプラス変換を用いる解法等の通常の方法は適用できない。このため次節では近似解法を検討する。

表 1

(theta=1.00 gamma=2.00)

| $t$   | H(t);<br>exact | H(t);<br>approx. | absolute<br>error | relative<br>error(%) |
|-------|----------------|------------------|-------------------|----------------------|
| 0.10  | 0.1002         | 0.1002           | 0.0000            | 0.0318               |
| 0.30  | 0.3037         | 0.3036           | 0.0000            | 0.0154               |
| 0.50  | 0.5150         | 0.5149           | 0.0001            | 0.0287               |
| 0.70  | 0.7368         | 0.7363           | 0.0005            | 0.0669               |
| 0.90  | 0.9704         | 0.9691           | 0.0012            | 0.1283               |
| 1.10  | 1.2165         | 1.2139           | 0.0025            | 0.2071               |
| 1.50  | 1.7465         | 1.7398           | 0.0068            | 0.3873               |
| 2.50  | 3.2722         | 3.2488           | 0.0235            | 0.7173               |
| 3.50  | 5.0135         | 4.9755           | 0.0380            | 0.7577               |
| 4.50  | 6.8840         | 6.8387           | 0.0452            | 0.6570               |
| 5.50  | 8.8229         | 8.7753           | 0.0477            | 0.5403               |
| 6.50  | 10.7954        | 10.7473          | 0.0482            | 0.4461               |
| 7.50  | 12.7834        | 12.7354          | 0.0480            | 0.3755               |
| 8.50  | 14.7783        | 14.7307          | 0.0476            | 0.3220               |
| 10.00 | 17.7756        | 17.7290          | 0.0466            | 0.2622               |
| 12.00 | 21.7748        | 21.7304          | 0.0445            | 0.2042               |
| 14.00 | 25.7747        | 25.7336          | 0.0411            | 0.1594               |
| 16.00 | 29.7747        | 29.7385          | 0.0362            | 0.1216               |
| 18.00 | 33.7747        | 33.7451          | 0.0296            | 0.0876               |
| 20.00 | 37.7747        | 37.7536          | 0.0211            | 0.0558               |
| 23.00 | 43.7747        | 43.7701          | 0.0046            | 0.0104               |

表 2

shape parameter=2.00  
scale parameter=0.40

| $t$       | $h(t)$<br>exact | $h(t)$<br>2 steps | $h(t)$<br>1 step |
|-----------|-----------------|-------------------|------------------|
| —stage 1— |                 |                   |                  |
| 0.10      | 0.080           | 0.0800            | 0.0800           |
| 0.20      | 0.160           | 0.1599            | 0.1599           |
| 0.30      | 0.240           | 0.2399            | 0.2399           |
| 0.40      | 0.320           | 0.3199            | 0.3199           |
| 0.50      | 0.400           | 0.3999            | 0.3999           |
| 0.70      | 0.560           | 0.5599            | 0.5599           |
| 0.90      | 0.720           | 0.7199            | 0.7199           |
| 1.10      | 0.880           | 0.8799            | 0.8799           |
| 1.30      | 1.040           | 1.0399            | 1.0399           |
| 1.50      | 1.200           | 1.1999            | 1.1999           |
| 2.00      | 1.600           | 1.5998            | 1.5998           |
| 2.50      | 2.000           | 1.9998            | 1.9998           |
| —stage 2— |                 |                   |                  |
| 2.60      | 2.080           | 2.0803            | 2.0797           |
| 3.00      | 2.400           | 2.4002            | 2.3996           |
| 3.50      | 2.800           | 2.8000            | 2.7994           |
| 4.00      | 3.200           | 3.1998            | 3.1991           |
| 4.50      | 3.600           | 3.5995            | 3.5987           |
| 5.00      | 4.000           | 3.9991            | 3.9982           |

### 3. 一般化された再生方程式の近似解法

#### [近似解法 1]

二通りの近似を考えたが、その 1 つは一般化された再生方程式を直接に変形していく方法である。変形の方法は幾通りか考えられたが、以下はその中で最も良い精度を得た式である。

$$H(t) = \lambda(0)t - Q_e(t|0) + \int_0^t \left[ 1 - \frac{\lambda(0)}{\lambda(y)} Q_e(t-y|y) \right] \times \left\{ q(y|0) + \frac{Q(y|0) \int_0^y q(y-z|z) dz}{\int_0^y [1 - Q(y-z|z)] dz} \right\} dy \quad (4)$$

ここで、 $Q_e(t|x) = \lambda(x) \int_0^t [1 - Q(u|x)] du$

$$\lambda(x) = \left[ \int_0^\infty [1 - Q(u|x)] du \right]^{-1}$$

である。近似式の検証のため  $H(t)$  がラプラス変換の手法で解ける特殊な例の 1 つである。

$$q(t|x) = \theta e^{-\theta(t+x)} + r(1 - e^{-\theta x}) e^{rt} \quad (t, x \geq 0)$$

([2]) について(4)式を用いた計算を行なう。結果(表 1) は相対誤差 1% 以下と、近似式が十分な精度をもつことを示す。

ただし問題となるのはこの近似式が十分な精度を保つ

のは、 $Q(x|y) \rightarrow Q_0(x)$  (as  $y \rightarrow \infty$ ) なる  $Q_0(x)$  をもつ寿命分布に限られることで、ワイブル分布はこの例にあたらない。したがって次の方法を考えた。

#### [近似解法 2]

これは既定の定義域内で未知関数(ここでは  $H(t)$ ) を 3 次スプライン関数の線形結合で表わせるとし、結合係数を関数の内積で求めるものである。この方法では係数を求めるための連立方程式を解くさい、行列の 1 つの要素を二重の数値積分から定めることになり計算の手間は多い。定義域の分割数が行列の rank になることから、細く分割して正確な値を決めるのは非常に計算時間が必要になる。論文の中では一度に大きな定義域を採らずに、まず小区間を計算し、以後は既知の関数として次の区間を計算する方法で行列要素数を減らす試みも行なった。表 2 はワイブル分布を  $F(t)$  に用いた  $h(t)$  の計算結果である。ここでは、 $a=1.0$  として小修理とみなしたのと同じことにして、比較の基準となる「exact」を求めた。「2step」とあるのが小区間に分けて計算した方である。(このケースではこちらの精度が高いが、逆のケースもある。) いずれも近似精度は良好といえる。

表 3-1 (ワイブル分布)

$C_0=2, C_1=1$   
 shape parameter=2  
 scale parameter=0.5

| $a$ | $T^*$ | $C(T^*)$ | $C(T_m)$<br>minimal | $IR(a)$<br>(%) |
|-----|-------|----------|---------------------|----------------|
| 0.1 | 6.758 | 1.237    | 1.650               | 24.98          |
| 0.2 | 4.686 | 1.409    | 1.685               | 16.40          |
| 0.3 | 3.778 | 1.534    | 1.722               | 10.90          |
| 0.4 | 3.236 | 1.634    | 1.759               | 7.09           |
| 0.5 | 2.866 | 1.718    | 1.797               | 4.40           |
| 0.6 | 2.594 | 1.790    | 1.836               | 2.53           |
| 0.7 | 2.388 | 1.852    | 1.876               | 1.28           |
| 0.8 | 2.228 | 1.907    | 1.917               | 0.51           |
| 0.9 | 2.100 | 1.956    | 1.958               | 0.11           |
| 1.0 | 2.000 | 2.000    | 2.000               | 0.0            |

表 3-2 (ガンマ分布)

$C_0=3, C_1=1$   
 shape parameter=2  
 scale parameter=1

| $a$ | $T^*$ | $C(T^*)$ | $C(T_m)$<br>minimal | $IR(a)$<br>(%) |
|-----|-------|----------|---------------------|----------------|
| 0.1 | 22.61 | 0.760    | 0.765               | 0.67           |
| 0.2 | 20.28 | 0.829    | 0.840               | 1.26           |
| 0.3 | 20.30 | 0.872    | 0.882               | 1.14           |
| 0.4 | 21.21 | 0.901    | 0.908               | 0.86           |
| 0.5 | 22.74 | 0.922    | 0.927               | 0.58           |
| 0.6 | 24.80 | 0.938    | 0.941               | 0.35           |
| 0.7 | 27.42 | 0.951    | 0.952               | 0.18           |
| 0.8 | 30.62 | 0.961    | 0.961               | 0.06           |
| 0.9 | 34.46 | 0.968    | 0.968               | 0.01           |
| 1.0 | 39.11 | 0.975    | 0.975               | 0.0            |

#### 4. 小修理としてモデル化した場合との比較

前述の近似を用いて最適周期, 期待コストの比較を行なう。F(t)にガンマ分布, ワイブル分布を用いて数例ずつ計算を行なった。表 3-1, 2 はその一部である。表中記号は,

- $T^*$ : 最適周期(期待コストを最小にする.)
- $T_m$ : 小修理としてモデル化したさいの最適周期.
- $a$ : 修理の程度を表わすパラメータ (小さい値ほど良い修理を表わす。a=0.0ならば取り替え, a=1.0ならば小修理である.)
- $C(T^*), C(T_m)$ :  $T^*, T_m$  を取替え周期とした時のコスト

$$IR(a) : \text{改善率} \left( = \frac{C(T_m) - C(T^*)}{C(T_m)} \times 100 \right)$$

を表わすものである。全体を通して以下が考察される。

1. 一般的な修理を小修理とみなしても,  $a=0.7$  以上の若返りがいちじるしくない場合には, 最適周期,

期待コストに大きな影響はおよぼさない。

2. 逆に, 修理を正しく評価することで変化の大きいのは, 若返りのいちじるしい場合と取替えコストが修理に比べ大きい場合といえる。後者は修理回数が増え, 修理の評価の差が大きく現われることによる。

3. 修理がシステムを若返らせるものであっても, その最適周期は長くならないケースも存在する。

以上から小修理の仮定はどのような場合に妥当とみなせるかの指針が得られる。小修理をモデル化に採り入れるさいに留意する点も明らかになった。また 3.2 の結果は興味深いもので, 小修理より優秀な修理をしたとしても, 単純に長く使用するのは不利になる場合があることを示す。

#### 5. 修理時間を確率変数とするモデル

次に, 2. と同様な方策 (Policy II) で, 稼働期間, 修理期間がともに履歴に依存するモデルを考える。これは交代再生過程に対する同様な一般化によって定式化される。これによりある時点での利用度(availability; 使用

表 4

| $a$ | Policy II |          | Policy II' |          |
|-----|-----------|----------|------------|----------|
|     | $T^*$     | $C(T^*)$ | $T^*$      | $C(T^*)$ |
| 0.1 | 4.5       | 1.47     | 5.13       | 1.78     |
| 0.5 | 1.7       | 1.77     | 3.14       | 2.09     |
| 1.0 | 1.2       | 1.91     | 2.51       | 2.38     |

shape parameter=1.5  
 scale parameter=1.0  
 cost of replacement=2  
 cost of repair=1

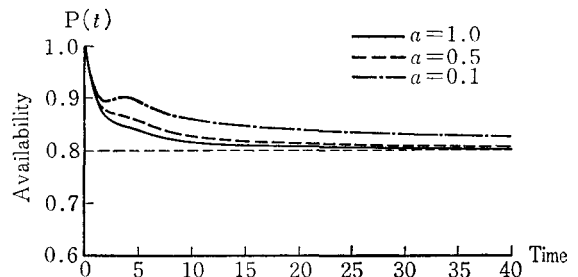


図 1

可能な状態にある可能性)を求めることも可能になる。本論文中では履歴の与え方でケースを3つに分類したが、ここではその1つを示す。このモデルでは稼働期間は直前の修理完了時点での有効年令に依存し、続く修理期間は、直前の稼働期間の長さに依存するとした。たとえば、長期間使用した後の修理には時間が多くかかる等のケースはこれに相当する。この時の利用度を計算したのが、図1である。稼働期間・修理期間は以下にしたがうとした。

$$A(x|t) = 1 - \frac{1 + \alpha(x + at)}{1 + \alpha at} \exp(-\alpha x)$$

$$B(x|t) = 1 - (1 - \exp(-\beta t)) - \exp(b_1 x) - \exp(-\beta t - b_2 x) \quad (b_1 \neq b_2)$$

ここで  $A(x|t)$  は  $t$  で修理完了したシステムの寿命分布。  $B(x|t)$  は直前の稼働期間が  $t$  であった時の修理期間の分布である。(図1では  $\alpha=1.0$ ,  $b_1=3.0$ ,  $b_2=6.0$ ) 図1では利用度がある値に収束する様子が観察できるが、この漸近的性質はブラックウェルの定理を一般化することで、あるクラスの分布について証明できる。

またこれを利用すれば、ある利用度までで使用を制限し、取替えを行なうという方策も可能となる。

## 6. Policy II' 型の取替え問題

今までは予防取替えをある時点で確定的に行なうとし

て考えたが、ここでは、ある時点を過ぎた最初の故障で修理をせず取替えを行なうとしてモデルを考える。(この方策は Policy II' と呼ばれる。)  $F(t)$  はワイブル分布とし、一般的修理の下での最適周期、期待コストを計算した(表4)。Policy II' の  $T^*$  とは、それを過ぎて生じた故障では取替えを行なうという意味がある。ここでは Policy II と II' の比較のさい、稼働中のシステムであっても故障したシステムであっても同じ取替えコストを与えているので、Policy II' が大変良い結果を与えているが、故障のペナルティー、下取り価格等を考慮したケースでは違う結果も考える。

## 参考文献

- [1] Makabe, H. and Morimura, H. (1963) "On Some Preventive Maintenance Policies", *J. Oper. Res. Soc. Japan*, Vol. 6, 17-47.
- [2] Kijima, M. and Sumita, U. (1986) "A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Process Governed by Non-negative Markovian Increments", *J. Appl. Prob.*, 23, 71-88.

## 学会到着図書

| 書名                                   | 編著者  | 発行元                        | 頁数    | 価格       | 発行年       | 判型            |
|--------------------------------------|--|----------------------------|-------|----------|-----------|---------------|
| 確実性と情報の経済分析                          | 細江守紀   | 九州大学出版会                    | 250 P | ¥2,800   | '87.8.10  | B 6           |
| SシステムII 詳説編                          | 渋谷政昭} 訳<br>柴田里程} 著<br>R. A. ベッカー }<br>J. M. チェンバース } | 共立出版                       | 631 P | ¥4,500   | '87.9.25  | B 6           |
| 事務系のためのコンピュータ入門                      | 赤池英俊, 藤井照久<br>和田 実, 石部公男<br>竹本宜弘                     | 同文館                        | 211 P | ¥1,800   | 62.10.5   | B 6           |
| 設計の方法, 創造的設計へのアプローチ                  | 岸本行雄著  | 日科技連出版社                    | 267 P | ¥3,000   | '87.11.6  | A 5           |
| 情報処理実用シリーズ2 統計処理エッセンシャル              | 高森 寛 共著<br>新村秀一                                      | 丸善                         | 241 P | ¥3,200   | 62.10.31  | A 5           |
| Quality, Productivity and Innovation | Y. K. Shetty and<br>V. M. Buehler                    | エルゼビアサイ<br>ンエスパブリッ<br>シャーズ |       | Dfl. 80- |           | 23.5×<br>16cm |
| パソコンのための方程式解法ソフト EQUATRAN-入門         | 三井東圧EQM研究会   | 勸省エネルギー<br>センター            | 178 P |          | '81.11.30 | A 4           |