

し、その収束を確認した。さらに交通流均衡問題に対しても前節の方法を利用してアルゴリズム2を適用し、同じ1重反復の解法である緩和射影法[1]よりも一般に速く収束することを確認した。

参 考 文 献

[1] M. Fukushima, "A Relaxed Projection Method for Variational Inequalities", *Math. Prog.* **35**(1986), pp.58-70.  
 [2] M. Fukushima and T. Itoh, "A Dual Approach to Asymmetric Traffic Equilibrium

Problems", to appear in *Mathematica Japonica*.

[3] J. H. Hammond and T. L. Magnanti, "Generalized Descent Methods for Asymmetric Systems of Equations", Working Paper, O. R. Center, M. I. T., 1986.  
 [4] R. A. Tapia, "Diagonalized Multiplier Methods and Quasi-Newton Methods for Constrained Optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **22** (1977), pp.135-194.

学生論文賞受賞論文

要約

単一制約付最大集荷問題の最適化アルゴリズム開発

片岡 靖詞 早稲田大学大学院理工学研究科 工業経営学分野オペレーションズ・リサーチ専攻 指導教官 森戸 晋教授

1. 研究目的

グラフ上における巡回路問題には、TSP (Traveling Salesman Problem) や VRP (Vehicle Routing Problem) 等の研究がある。これらは、与えられたノードを「すべて」(一度だけ、あるいは少なくとも一度) 巡ることが前提である。

本研究では単一線形制約の下でノード上に与えられた価値を集めて巡り、合計価値を最大化することを考える。この問題は単純かつ基本的でありながら、TSP等とは別に巡るノードを選ぶ問題が加わる。

本研究では次の点に主眼をおいて進めた。

- 1) 定式化の工夫によって扱いやすい問題にする。
- 2) 1)の定式化の特性に合った解法を開発する。
- 3) 解法の特長について計算機実験を行なう。

3. 定式化の工夫と基本解法

非対称型グラフを  $G(V, E)$ ,  $V, E$  は各々ノード, アークの集合とする。各ノード  $i \in V$  には価値  $c_i \geq 0$ , 各アーク  $(i, j) \in E$  には時間  $t_{ij} \geq 0$ , また時間制約  $TC$  が与えられている。ごく自然な定式化では各アーク  $(i, j)$  に 0-1 変数  $x_{ij}$  を, 各ノード  $i$  にも 0-1 変数  $y_i$  を考える

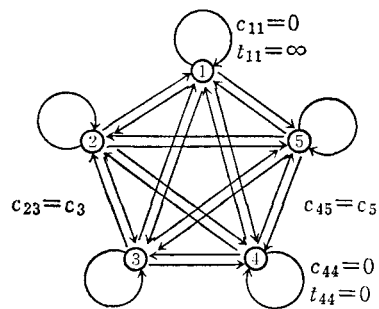


図 1 変換されたグラフ

が、この定式化では変数型が  $x$  と  $y$  とに分離され、TSPの解法で有効な手法(緩和問題としての割当問題, ラグランジュ緩和問題など)の利用がむずかしい。この点を解決するために以下の手順でグラフの変換を行なう。  
 <変換1>: 各アーク  $(i, j)$  に対し、終点にあたるノードを  $p$  とすれば,  $c_{ip} = c_p, i \in V - \{p\}$  となる係数  $c_{ij}$  を与える。  
 <変換2>: 各ノードにおいてセルフループを構成し, 0-1 変数  $x_{ii}$  を与える。その係数はセンターをノード1とすれば  $c_{ii} = 0, t_{ii} = 0, i \in V - \{1\}; c_{11} = 0, t_{11} = \infty$ , とする(図1)。

以上の変換手順により定式化は(P)のようになる。

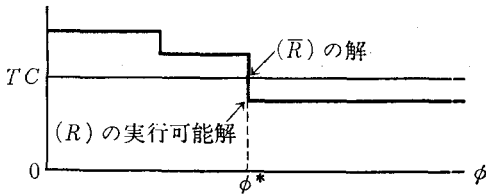


図2  $\phi$  と  $\eta$  の関係

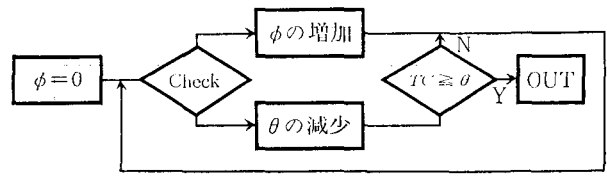


図3  $(\bar{R})$  を求めるシステム

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } c^T x & (1) \\
 & \text{s.t. } t^T x \leq TC & (2) \\
 (P) \quad & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{for all } j & (3) \\
 & \sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{for all } i & (4) \\
 & \text{部分巡回路除去制約} & (5) \\
 & (\text{セルフープは部分巡回路と見なさない}) \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{for all } i, j & (6)
 \end{aligned}$$

(P)では次の性質からTSPの解法が利用できる。  
 <性質1>: 制約式(2), (5)を取り除き(6)を連続緩和した問題は割当問題となる。  
 <性質2>: 制約式(2)や(5)にラグランジュ乗数を掛けて目的関数に組み込むと、各ラグランジュ乗数の振舞いが $c_{ij}$ に都合よく関わる。  
 <性質3>: 巡らないノードはセルフープにより割当問題の実行可能性を保ちながら、自動的に摘出される。  
 本研究では(P)に対する分枝限定法を試みる。緩和問題を(P)から制約式(5)を除去した問題(R)とすれば、解法の基本は、非対称型TSPの分枝限定法による解法[2]にしたがえる。

### 3. 緩和問題の解き方I (緩和問題 $\bar{R}$ )

(R)はまだ0-1計画問題であるので、さらに線形緩和した問題( $\bar{R}$ )を考える。 $(\bar{R})$ の解法の基本には古林[1]の研究を用いた。ただし目的関数の係数は $c' = M - c \geq 0$  ( $M$ は適当に大きな正数)として最小化問題とする。 $(\bar{R})$

表1 工夫による実行時間の比較(PC-9801VM2, 秒)

$n$	5	6	7	8	9
時間1	25.9	65.1	170.5	189.5	163.5
時間2	4.7	5.2	10.8	9.0	6.9

$n$	10	15	20	25	30
時間2	28.6	25.7	43.5	71.3	131.9

1 ≤ c ≤ 10, 50 ≤ t ≤ 70, TC = 50 × n. 10問の平均  
 時間1 何も工夫をしていないもの  
 時間2 上記の工夫を加えたもの

は次のパラメトリックな問題  $\bar{R}_0(\theta)$  の  $\theta = TC$  の場合として扱える。

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } c'^T x \\
 & \text{s.t. } t^T x \leq \theta \\
 \bar{R}_0(\theta) \quad & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{for all } j \\
 & \sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{for all } i \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \text{for all } i, j
 \end{aligned}$$

次にラグランジュ乗数  $\phi$  を用いて問題  $\bar{R}(\phi)$  を考える。

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } c'^T x + \phi t^T x = c^*(\phi)^T x \\
 \bar{R}(\phi) \quad & \text{s.t. } \sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{for all } j \\
 & \sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{for all } i \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \text{for all } i, j
 \end{aligned}$$

ここで  $c^*(\phi) = c' + \phi t$ ,  $\eta = t^T x(\phi)$ , ( $x(\phi)$  は  $\bar{R}(\phi)$  の最適解) とする。

$\bar{R}(\phi)$  は任意の  $\phi$  に対し割当問題となる。 $\bar{R}_0(\theta)$  と  $\bar{R}(\phi)$  とは等価であり、したがって  $\bar{R}(\phi)$  が  $\phi$  についてパラメトリックに解ければ ( $\bar{R}$ ) も最適に解ける[1]。このとき  $\phi$  と  $\eta$  との関係は図2のような階段状のグラフになる。このグラフで水平になっている部分は整数解が保証され、垂直になっている部分では一般に分数解となる。 $(\bar{R})$  の解は時間制約  $TC$  と階段状のグラフとが交差した部分に相当する。このことより ( $\bar{R}$ ) は図3のように、 $\phi$  を増加させる過程と、 $\theta$  を減少させる過程とが組み合わさったシステムによって解くことができる。

### 4. 緩和問題の解き方II (分枝限定法)

(R) の0-1解を求める分枝変数として、セルフープのみを選ぶと非常に効果がある。また階段状のグラフで  $\eta = TC$  を越えた直後の整数解(水平部分)は(R)の実行可能解となり、それを下界値にすることができる。以上のような工夫の有無で実行時間を比較した(表1)。

また  $\phi$  の初期値として、親問題の  $\phi$  の最適値を  $\phi^*$ 、あるセルフープを1にした小問題の  $\phi$  の最適値を  $\phi_0$ 、0にした小問題では  $\phi_0$  とすると次の関係が示される。

$$\phi_1 \leq \phi^* \leq \phi_0$$

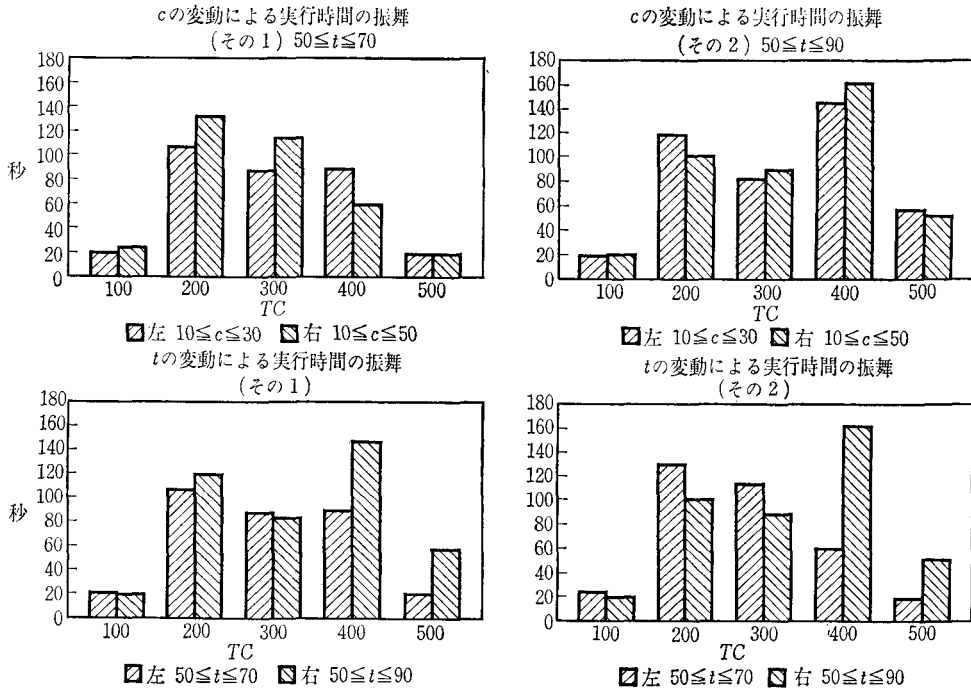


図4 <実験1>の結果

この関係式はセルフループを0にした小問題は  $\phi^*$  を初期値にできること、1にした小問題では図3で示されたシステムを逆に考えることによってさらに効率的なアルゴリズムが考えられることを示している。

### 5. 実験結果および考察

本実験では、問題におけるさまざまな要因を考え、アルゴリズムの特性の調査を主眼とした。

<実験1>: 要因として  $c$  の範囲,  $t$  の範囲,  $TC$  の値各々について  $n=10$  に限って実行時間を見た(図4)。

この実験から、 $c$  や  $t$  の範囲が実行時間に影響しているとは言いがたい。しかしながら  $TC$  による実行時間の影響はかなり大きい。つまり巡らないノードの数が、与えられた全ノードの数の半数位になるときに組合せの数も増大するため解き難くなる。

<実験2>:  $c$  の範囲を平行的にずらすことによる影響を調べると次のような興味ある結果が得られた(表2)。

表2 <実験2>の結果 (PC-9801 VM2, 秒)

$c$	$1 \leq c \leq 21$	$10 \leq c \leq 30$	$20 \leq c \leq 40$
実行時間	298.5	798.2	1159.1

$n=16, 100 \leq t \leq 180, TC=1600.$  10間の平均

$c$  の範囲が平行的にずれると実行時間が結果のように変わった。この変換は等価とは言えないがアルゴリズムの傾向としては興味ある結果である。

<実験3>:  $t$  の値をスケーリングして、本質的には等価な問題が、実行時間へどう影響するか調べた(表3)。

$t$  のスケーリングの影響は  $c$  の範囲の位置によるものほどは大きく出なかったが、小さなスケールの問題は速く解けることがわかる。

### 参考文献

- [1] T. Kobayashi "The Lexico-Shortest Route Algorithm for Solving the Minimum Cost Problem with Linear Constraint" *J. O. R. S. J.* **83**, Vol. 26, pp. 167-185
- [2] Lawler "Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization Problem" '85

表3 <実験3>の結果 (PC-9801 VM2, 秒)

$t$ $TC$	$25 \leq t \leq 45$ 400	$50 \leq t \leq 90$ 800	$100 \leq t \leq 180$ 1600
実行時間	143.2	261.8	298.5

$n=16, 1 \leq c \leq 21.$

10間の平均