# 変分不等式に対する解法とその交通流均衡問題への適用

伊藤　武寿　京都大学大学院　工学研究科数理工学専攻　指導教官　茨木俊秀教授

## 1. はじめに

ORや経済における均衡問題は変分不等式として定式化することが可能であり，その解法についても射影法や対角化法などが提案されている．しかし，それらの解法の多くは，部分問題を適当な反復法を用いて逐次解くため，全体としては2重反復となる．本論文の目的は一般的な変分不等式に対して，最適化問題の解法を拡張することにより非常に実行が容易な1重反復の解法を提案することである．ここでは，まず制約集合が凸であるという従来の変分不等式に対する条件を緩和した，より一般的な変分不等式について考察する．次に制約なしの変分不等式，すなわち非線形方程式系に対し文献［3］で提案された方法を修正することにより，より緩い条件のもとで収束する解法を提案し，不等式制約をもつ一般化変分不等式に対しても，最適化問題の解法の1つである乗数法を拡張した方法を提案し，その収束性を示す．最後に，交通流均衡問題にこの解法が効果的に適用できることを示すとともに，数値実験を行ない解法の有効性を確認する．

## 2. 一般化変分不等式

従来の変分不等式は，$S\subset R^n$を空でない閉凸集合，$F$を$R^n$から$R^n$への写像，$\langle\cdot,\cdot\rangle$を$R^n$の内積とすると，

Find $x$ such that

$$\langle F(x),\ x'-x\rangle\geqq 0 \text{ for all } x'\in S \tag{1}$$

と表わされるが，この定式化は制約集合$S$が非凸の場合には適当とはいえない．そこで$S$が必ずしも凸でない場合をも含んだ，一般化された変分不等式：

$$\langle F(x),\ y\rangle\geqq 0 \text{ for all } y\in T_S(x) \tag{2}$$

について考察する．ただし，ここで$T_S(x)$は集合$S$の点$x$における接錐であり，$S$が凸である場合には(2)と(1)は等価となる．さらに以下では写像$F$は連続微分可能であり，制約集合$S$は2階連続微分可能な関数$g_i$に対して

$$g_i(x)\leqq 0,\ i=1,2,\cdots,m, \tag{3}$$

を満足する点$x$の集合と仮定する．そのとき，適当な制約想定のもとでは，問題(2)は，次の問題と等価であることが容易に示される．

Find $x\in R^n$, $u\in R$, $i=1,2,\cdots,m$, such that

$$F(x)+\sum u_i\nabla g_i(x)=0, \tag{4}$$
$$g_i(x)\leqq 0,\ u_i\geqq 0,\ u_ig_i=0,\ i=1,2,\cdots,m.$$

さらに，$\sigma$を正のパラメタとして，写像$H: R^{n+m}\to R^n$を

$$H(x,u)=F(x)+\sum\max(0,u_i+\sigma g_i(x))\nabla g_i(x), \tag{5}$$

と定義すると，次の定理はある仮定の下で$H(x,u)$が$x$について局所的に単調(monotone)となることを示している．

**定理 1**　$x^*$, $u_i^*$が(4)の解であり，狭義の相補条件が成り立つとする．さらに$\nabla F(x^*)+\sum u_i^*\nabla^2 g_i(x^*)$がアクティブな制約式の勾配の張る部分空間の直交補空間において正定値であるとする．そのとき，十分大きな$\sigma$に対して$\nabla_x H(x^*,\ u^*)$は正定値となる．■

## 3. 無制約問題に対する解法

制約のない変分不等式は非線形方程式系$F(x)=0$と等価であり，$\nabla F(x)$が任意の$x$において対称な場合には$F(x)=\nabla f(x)$となる関数$f: R^n\to R$が存在し$F(x)=0$は無制約最適化問題$\min f(x)$に対する1次の必要条件とみなすことができ，更に$F$が単調である場合には十分条件ともなっている．そこでHammondとMagnanti［3］は$F$が対称でない場合にまで最急降下法を拡張した解法を提案している．つまり，現在の点$x$に対し探索方向$d$として$-F(x)$を採用し，

$$\langle F(x+\alpha d),\ d\rangle=0 \tag{6}$$

の直線探索規範にもとづいてステップ長$\alpha$を定め，次の点を求める解法である．$F$が対称な場合には$-F(x)$は最急降下方向であり，(6)は正確な直線探索に対応している．

また，[3]においては正則なスケーリング行列$G$を用いて$GF(x)$に対する上述の解法の適用も提案している．さらに，そのとき各$x$に対して$G\nabla F(x)$と$(G\nabla F(x))^2$がともに正定値となることが収束のための十分条件であることも示されている．ここで提案するアルゴリズムは直線探索における規範を修正したものであり，文献[3]で課せられた条件より緩い条件のもとで収束が保証される．

**アルゴリズム 1**

Step 0. 正則行列$G$を選び，初期点$x^0$を定め，$k=0$とする．

Step 1. 探索方向$d^k=-GF(x^k)$を計算し，$\|d^k\|$が十分小さければ終了．

Step 2. ステップ長$\alpha$を$\mathrm{minimize}\|GF(x^k+\alpha d^k)\|$より求め，$x^{k+1}=x^k+\alpha d^k$と更新し，$k=k+1$としてStep 1へ．■

ここで生成される点列$\{x^k\}$は，以下の収束定理を満たす．

**定理 2** (大域的収束性) 各$x$に対して$G\nabla F(x)$が正定値ならば，アルゴリズム1が生成する点列$\{x^k\}$は$F(x)=0$の解に収束する．■

## 4. 不等式制約付き問題に対する解法

制約領域$S$が不等式系(3)で表わされる一般化変分不等式(2)に対して，最適化問題に対する解法の1つである乗数法を拡張した解法を提案する．明らかに，$(x^*,u^*)$が(4)の解ならば，それは方程式$H(x,u)=0$の解にもなっている．さらに，定理1の条件が満たされるならば$H(x,u^*)$は$x^*$の近傍で$x$に関して単調となり，$H(x,u^*)$に対しアルゴリズム1を適用することによって$x^*$を求めることができる．しかし，正確な$u^*$の値を前もって知ることはできないので$x$とともに$u$も更新しなくてはならない．

**アルゴリズム 2**

Step 0. 初期値$x^0$と$u^0$を定め，$k=0$とする．

Step 1. 探索方向$d^k=-H(x^k,u^k)$を計算する．$\|d^k\|$と$|\max(-u_i^k,\ \sigma g_i(x^k))|$, $i=1,2,\cdots,m$, が十分小さければ終了．

Step 2. $x^{k+1}=x^k+\alpha_k d^k$と更新する．

Step 3. $u^k$を更新して$u^{k+1}$とする．$k=k+1$としてStep 1へ．■

ここでステップ長$\alpha_k$の選び方としては，$H(x,u^k)$に対してアルゴリズム1と同様の規範$\mathrm{minimize}\|H(x^k+\alpha d^k,\ u^k)\|$を用いて求める方法や，$\alpha_k\equiv\alpha(>0)$と固定したステップ長を使うことが考えられる．また，$u^k$の更新方法については次のようなものが考えられる．

① $u_i^{k+1}=u_i^k+\max(\sigma g_i(x^{k+1}),\ -u_i^k)$ (7)

② $\|u^{k+1}-u^*\|\leqq O(\|x^{k+1}-x^*\|)$を満足するような$u^{k+1}$の評価を用いる．

③ $\|u^{k+1}-u^*\|\leqq O(\|x^{k+1}-x^*\|^2)$を満足するような$u^{k+1}$の評価を用いる．

これらの$u^k$更新方法については通常の乗数法に対しても，類似の方法が考察されている[4]．次にこのアルゴリズムに対する収束定理を与える．

**定理 3** (局所収束性) $(x^*,u^*)$を定理1の条件を満たす一般化変分不等式の解とする．さらに，アルゴリズム2において$\alpha_k$は十分小さい値に固定され，$u^k$は③の方法で更新されるとする．その時，初期解$(x^0,u^0)$が$(x^*,u^*)$の十分近くにあるならば，生成される点列$\{(x^k,u^k)\}$は$(x^*,u^*)$に収束する．■

## 5. 交通流均衡問題への適用

交通流均衡問題が，変分不等式として定式化できることはよく知られている　特に，文献[2]で与えられた定式化においては，変数はアーク上のコストとO/Dペア間のコストであり，制約式は不等式のみであるのでアルゴリズム2を適用することが可能である．しかし，各制約式がO/Dペア間の1つのパスに対応しているため，問題の規模の増加に伴い制約式の数がいちじるしく増加するので，アルゴリズム2を以下のように修正して適用することを考える．均衡解においてアクティブな制約式は，各O/Dペア間の最短路に対応しているので，各反復において計算されるO/Dペア間の最短路に対応する式を制約に追加するとともに，(7)を用いて各制約条件に対応する$u_i^k$を更新し，$u_i^{k+1}$が負となったところで第$i$制約を取り除き必要な制約のみを逐次構成する．そのため，すべての制約式を陽に与える必要はない．さらに，均衡解におけるラグランジュ乗数によって，O/Dペア間の需要量が各最短路にどのように配分されるかを決定することも可能である．

## 6. 数値例

まずアルゴリズム1に対して数値実験を行ない，[3]のアルゴリズムでは収束しないがアルゴリズム1では収束する問題が存在することが確かめられた．また，制約領域が凸でない問題例に対してアルゴリズム2を適用

し，その収束を確認した．さらに交通流均衡問題に対しても前節の方法を利用してアルゴリズム2を適用し，同じ1重反復の解法である緩和射影法[1]よりも一般に速く収束することを確認した．

### 参考文献


[1] M. Fukushima, "A Relaxed Projection Method for Variational Inequalities", *Math. Prog.* **35**(1986), pp.58-70.

[2] M. Fukushima and T. Itoh, "A Dual Approach to Asymmetric Traffic Equilibrium Problems", to appear in *Mathematica Japonica.*

[3] J. H. Hammond and T. L. Magnanti, "Generalized Descent Methods for Asymmetric Systems of Equations", Working Paper, O. R. Center, M. I. T., 1986.

[4] R. A. Tapia, "Diagonalized Multiplier Methods and Quasi-Newton Methods for Constrained Optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **22** (1977), pp.135-194.


**学生論文賞受賞論文** 　　　　　　　　　　**要約**

# 単一制約付最大集荷問題の最適化アルゴリズム開発


片岡　靖詞　早稲田大学大学院理工学研究科 工業経営学分野オペレーションズ・リサーチ専攻　指導教官　森戸　晋教授


## 1. 研究目的

グラフ上における巡回路問題には，TSP (Traveling Salesman Problem)やVRP(Vehicle Routing Problem)等の研究がある．これらは，与えられたノードを「すべて」(一度だけ，あるいは少なくとも一度) 巡ることが前提である．

本研究では単一線形制約の下でノード上に与えられた価値を集めて巡り，合計価値を最大化することを考える．この問題は単純かつ基本的でありながら，ＴＳＰ等とは別に巡るノードを選ぶ問題が加わる．

本研究では次の点に主眼をおいて進めた．

1) 定式化の工夫によって扱いやすい問題にする．
2) 1)の定式化の特性に合った解法を開発する．
3) 解法の特性について計算機実験を行なう．

## 3. 定式化の工夫と基本解法

非対称型グラフを $G(V,E)$, $V$, $E$ は各々ノード，アークの集合とする．各ノード $i\in V$ には価値 $c_i\geqq 0$, 各アーク $(i,j)\in E$ には時間 $t_{ij}\geqq 0$, また時間制約 $TC$ が与えられている．ごく自然な定式化では各アーク $(i,j)$ に0-1変数 $x_{ij}$ を，各ノード $i$ にも0-1変数 $y_i$ を考える

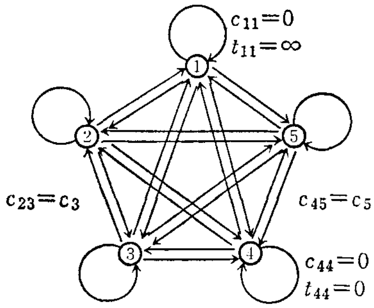


図 1　変換されたグラフ

が，この定式化では変数型が $x$ と $y$ とに分離され，ＴＳＰの解法で有効な手法（緩和問題としての割当問題，ラグランジュ緩和問題など）の利用がむずかしい．この点を解決するために以下の手順でグラフの変換を行なう．

〈変換1〉: 各アーク $(i,j)$ に対し，終点にあたるノードを $p$ とすれば，$c_{ip}=c_p$, $i\in V-\{p\}$ となる係数 $c_{ij}$ を与える．

〈変換2〉: 各ノードにおいてセルフループを構成し，0-1変数 $x_{ii}$ を与える．その係数はセンターをノード1とすれば $c_{ii}=0$, $t_{ii}=0$, $i\in V-\{1\}$ ; $c_{11}=0$, $t_{11}=\infty$, とする(**図1**)．

以上の変換手順により定式化は($P$)のようになる．