〔連載講座〕

企業体の効率性分析手法

——DEA入門（2）——

刀根　薫

3.　D効率分析の前提条件

〈FP〉の制約条件は次のようなものである．

$$\sum_r u_r y_{rj} / \sum_i v_i x_{ij} \leqq 1 \quad (j=1,\cdots,n) \qquad (3.1)$$

$$u_r > 0 \quad (r=1,\cdots,s)$$

$$v_i > 0 \quad (i=1,\cdots,m)$$

このことはDMUの入力と出力の関係に関して大きな仮説を設けたことになる．その点について説明する．

3.1　活動の凸錐性

いま，活動の集合をTとする．Tの要素が(3.1)式を満たすという前提のみから選ばれるとすればTは次の性質をもつ．

A1）　$(x, y) \in T$ ならば正の k に対して

$$(k_x, k_y) \in T \qquad (3.2)$$

A2）　$(x_1, y_1) \in T, (x_2, y_2) \in T$ ならば，$0 \leqq \lambda \leqq 1$ を満たす任意の λ に対して，

$$((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in T \qquad (3.3)$$

A3）　$(x, y) \in T$ ならば，$y_1 \leqq y$, $x_1 \geqq x$ なる任意の y_1, x_1 に対して

$$(x_1, y_1) \in T \qquad (3.4)$$

以上のことからTは凸錐をなすことがわかる．より厳密に言えば，与えられたデータ(x_j, y_j) $(j=1,\cdots,n)$ に対してTは，それらの点を含みかつA1)，A2)，A3) を満たす最小の凸錐である．（図1参照）

とね　かおる　埼玉大学 大学院 政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255

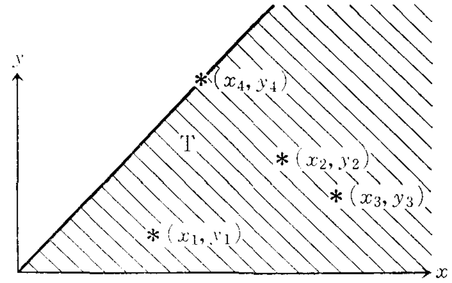

図1　凸錐T

3.2　効率性の双対LPによる考察

〈LPO〉の双対問題は次のとおりである．

〈LPDO〉

目的関数　$\min \xi_{j_0} = f_{j_0} - \varepsilon(\sum s_r^+ + \sum s_i^-)$ (3.5)

制約　$f_{j_0} x_{ij_0} - \sum_j x_{ij} \lambda_j - s_i^- = 0 \ (i=1,\cdots,m)$ (3.6)

$$\sum_j y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rj_0} \ (r=1,\cdots,s) \qquad (3.7)$$

$$\lambda_j \geqq 0 \ (j=1,\cdots,n) \qquad (3.8)$$

$$s_r^+ \geqq 0 \ (r=1,\cdots,s) \qquad (3.9)$$

$$s_i^- \geqq 0 \ (i=1,\cdots,m) \qquad (3.10)$$

f_{j_0} は符号無制約　(3.11)

ここに$f_{j_0}, \lambda_j, s_r^+, s_i^-$はそれぞれ(2.2)，(2.3)，(2.4)，(2.5) に対する双対変数である．ただし(2.4)，(2.5) は無限小正数 ε を導入して (2.18)，(2.19) の形にしている．すなわち

$$-u_r \leqq -\varepsilon \ (r=1,\cdots,s) \qquad (3.12)$$

$$-v_i \leqq -\varepsilon \ (i=1,\cdots,m) \qquad (3.13)$$

として取り扱っている．

この双対問題を用いてD効率性を検討してみる．

(a) j_0がD効率的である場合

そのとき〈LPO〉の最適目的関数値は1である.

$$z_{j_0}{}^*=1$$

よって, 双対定理より〈LPDO〉の最適目的関数値も1である. εが無限小ではあるが正数であることに注意すれば

$$\begin{aligned} &f_{j_0}{}^*=1 \\ &s_r{}^{+*}=0 \ (r=1,\cdots,s) \qquad (3.14) \\ &s_i{}^{-*}=0 \ (i=1,\cdots,m) \end{aligned}$$

であることがわかる. さらに, 相補性定理より

$$\lambda_j{}^*=0 : j\in E(j_0)\text{のとき} \qquad (3.15)$$

であることがわかる. ここに$E(j_0)$はD効率的フロンティア

$$E(j_0)=\{j : \sum u_r{}^* y_{rj}-\sum v_i{}^* x_{ij}=0,\ j=1,\cdots,n\}$$

である.

以上のことから

$$\begin{aligned} &f_{ij_0}{}^*=1 \\ &s_r{}^{+*}=0 \ (r=1,\cdots,s) \\ &s_i{}^{-*}=0 (i=1,\cdots,m) \\ &\lambda_j{}^*=1 : j=j_0\text{のとき} \qquad (3.16) \\ &\quad =0 : j\neq j_0\text{のとき} \end{aligned}$$

とすれば, これらの値は〈LPDO〉の最適解であることがわかる. そして$\lambda_j{}^*$の値($j=j_0$のとき1, それ以外のとき0) はDMU j_0の効率性が自分自身の入力と出力の比率によって決定され得ることを示唆している. この点で次に見るように, 非効率的なDMUといちじるしく異なる性格をもつのである.

(b) j_0がD非効率的である場合

このとき

$$z_{j_0}{}^*<1$$

であり, 双対定理より

$$f_{j_0}{}^*<1 \qquad (3.17)$$

となる. また相補性より

$$\lambda_{j_0}{}^*=0 \qquad (3.18)$$

である. よって(3.6), (3.7)は次のようになる.

$$f_{j_0}{}^* x_{ij_0}=\sum_{j\in E(j_0)} x_{ij}\lambda_j{}^*+s_i{}^{-*}$$
$$(i=1,\cdots,m) \qquad (3.19)$$

$$y_{rj_0}=\sum_{j\in E(j_0)} y_{rj}\lambda_j{}^*-s_r{}^{+*} \ (r=1,\cdots,s) \qquad (3.20)$$

ベクトル記号を用いれば次のようになる.

$$f_{j_0}x_{j_0}=\sum_{j\in E(j_0)}\lambda_j{}^* x_j+s^{-*} \qquad (3.21)$$

$$y_{j_0}=\sum_{j\in E(j_0)}\lambda_j{}^* y_j-s^{+*} \qquad (3.22)$$

この式は活動Tが満足した3つの性質A1), A2), A3)をもとに解釈することができる. まず

$$(\sum_E\lambda_j{}^* x_j, \sum_E\lambda_j{}^* y_j)=\sum_E\lambda_j{}^*(x_j, y_j) \qquad (3.23)$$

であるから左辺の活動は右辺にある効率的フロンティアの活動の非負1次結合として表現される. さらに s^{-*}, s^{+*} の非負性と性質A3) より

$$(\sum\lambda_j{}^* x_j+s^{-*}, \sum\lambda_j{}^* y_j-s^{+*})$$

は1つの活動である. さらに$f_{j_0}{}^*<1$であるから, 活動 (x_{j_0}, y_{j_0}) は効率的フロンティア活動によって完全に記述されたことになる. すなわちDMU j_0を除いて, Tを作ったとしても, それを加えた場合のTと同一であり, それが他の効率的フロンティアの内に埋もれてしまうことを意味する. 経営体としては“特色”の少ないことを示している.

このような活動を効率的フロンティアまで引き上げる1つの方法は

(1) スラック s^{-*} および s^{+*} をゼロにする…入力の遊びをカットし出力の不足を補う.

(2) さらに $f_{j_0}{}^* x_{j_0}$ を新入力とするような一率の入力削減を行なう. ($f_{j_0}{}^*<1$ であることに注意)

こうすれば, 活動j_0は効率的フロンティアに引き上げられる. もっとも上の方法はあくまでも1つの考え方であり, 状況に応じてさまざまな対応が考えられる.

また, 繰り返し注意したいことは, 上記の分析は活動の集合TがA1), A2), A3)を満たす場合にだけ通用するということであり, この前提条件が満たされない場合は, それぞれの場合に応じた検討が必要となる. この点に関しては第5節において再考する.

表 1　入力と出力

活動(j)		1	2	3	4	5	6
入力	x_{1j}	4	6	8	4	2	10
	x_{2j}	3	2	1	2	4	1
出力	x_j	1	1	1	1	1	1

4. 説明的例題

ここでこれまで述べてきたことを，小さい例題をもとに説明する．2入力，1出力のシステムを考える．6コの活動があり，その入力，出力の値は表1のとおりとする．

出力がすべて1になっているが，これは各活動の出力が等しくなるように入力値を調整した結果である．1出力の場合はこのような調整ができるが，一般的には不可能である．次のDMUについて検討を進める．

(a)　$j_0=2$ の場合

このとき〈LPO〉は次のようになる

$$\max\ z_2=u \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\text{制約}\quad & 6v_1+2v_2=1\\
& u-4v_1-3v_2\leqq 0\\
& u-6v_1-2v_2\leqq 0\\
& u-8v_1-v_2\leqq 0\\
& u-4v_1-2v_2\leqq 0\\
& u-2v_1-4v_2\leqq 0\\
& u-10v_1-v_2\leqq 0\\
& u\geqq\varepsilon,\ v_1\geqq\varepsilon,\ v_2\geqq\varepsilon
\end{aligned}$$

このＬＰの最適解は次のとおりである．

$$z_2^*=u^*=6/7$$

$$v_1^*=1/14$$

$$v_2^*=2/7$$

$z_2^*<1$ であるから活動2はD効率的ではない．この活動に対する効率的フロンティアは $j=3$，4である．すなわち

$$E(2)=\{3,4\}$$

である．

ＬＰ(3.24)の双対問題は次のようになる．

$$\min\ \zeta_2=f_2-\varepsilon(s^++s_1^-+s_2^-)$$

$$\begin{aligned}
\text{制約}\quad & 6f_2-4\lambda_1-6\lambda_2-8\lambda_3-4\lambda_4-2\lambda_5-10\lambda_6\\
& \quad -s_1^-=0\\
& 2f_2-3\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_4-4\lambda_5-\lambda_6\\
& \quad -s_2^-=0\\
& \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6-s^+=1\\
& \lambda_j\geqq 0\ (j=1,\cdots,6)\\
& s^+\geqq 0,\ s_1^-\geqq 0,\ s_2^-\geqq 0
\end{aligned}$$

この双対問題の最適解は

$$\zeta_2^*=f_2^*=6/7$$

$$\lambda_3^*=2/7,\quad \lambda_4^*=5/7$$

その他の λ_j^* と s^{+*}, s_1^{-*}, s_2^{-*} は0である．

このことより活動2の入力ベクトルは

$$6/7*(6,2)=2/7*(8,1)+5/7*(4,2)$$

出力は

$$1=2/7*1+5/7*1$$

として活動3，4により表現される．前に考察したことにより活動2の入力を一様に6/7$(=f_2^*)$倍した点

$$6/7*(6,2)$$

はD効率的な活動である．

$E(2)$に入っている活動3，4がD効率的であることは容易にわかることである．

(b)　$j_0=1$ の場合

$j_0=1$ に対しては，$E(1)=\{4,5\}$であり活動1は非効率的である．活動5はD効率的である．

(c)　$j_0=6$ の場合

このとき〈LPO〉は次のようになる．

$$\max\ z_6=u$$

$$\begin{aligned}
&\text{制約}\\
& 10v_1+v_2=1\\
& u-4v_1-3v_2\leqq 0\\
& u-6v_1-2v_2\leqq 0\\
& u-8v_1-v_2\leqq 0\\
& u-4v_1-2v_2\leqq 0\\
& u-2v_1-4v_2\leqq 0\\
& u-10v_1-v_2\leqq 0\\
& u\geqq\varepsilon,\ v_1\geqq\varepsilon,\ v_2\geqq\varepsilon
\end{aligned}$$

このＬＰの最適解は

$u^* = 1-2\varepsilon$

$v_1^* = \varepsilon$

$v_2^* = 1-10\varepsilon$

であり，活動６はＤ効率的ではない．このＬＰの双対問題は次のとおりである．

$$\min\ \zeta_6 = f_6 - \varepsilon(s^+ + s_1^- + s_2^-)$$

制約 $10f_6 - 4\lambda_1 - 6\lambda_2 - 8\lambda_3 - 4\lambda_4 - 2\lambda_5 - 10\lambda_6 - s_1^- = 0$

$f_6 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 - 4\lambda_5 - \lambda_6 - s_2^- = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - s^+ = 1$

$\lambda_j \geqq 0 \ (j = 1, \cdots, 6)$

$s^+ \geqq 0,\ s_1^- \geqq 0,\ s_2^- \geqq 0$

このＬＰの最適解は

$f_6^* = 1$

$\lambda_3^* = 1$

$s_1^{-*} = 2$

その他の $\lambda_j^*, s^{+*}, s_2^{-*}$ は０である

また

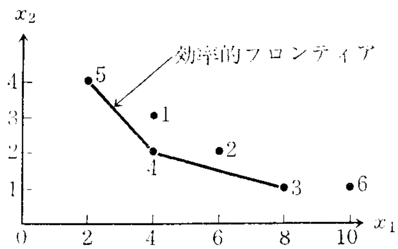

図 2　例題の図解

$\zeta_6^* = 1-2\varepsilon$

である．この結果，活動６の入力は次のように表わされる．

$$(10,\ 1) = (8,\ 1) + (2,\ 0)$$

↑活動６　↑活動３　↑スラック

効率的な活動３にスラックを加えたものが活動６であり，しかも出力は同じであることから非効率的であることがわかる．

図２に各ＤＭＵの入力値と効率的フロンティアを示す．