分枝限定法と分割配送問題

鈴木　久敏

1. はじめに

冒頭から恐縮ですが，図1の問題を考えてみてください．デポ（配送基地）が1カ所，需要地が3カ所あり，各地点間の移動費用が与えられている．デポの商品を積載容量300個のトラックで，各地の需要200個を満たすように運ぶには，どのように配送するのが費用最小となるであろうか．また，全部で何回の配送が必要であろうか．

考え方はほぼ次の3通りに分けられる．

(a) 需要地 1，2，3に別々のトラック便で200個ずつ配送する（図2）．

(b) 需要地2の需要を分割し，半分の100個と需要地1の200個の合計300個を1つのトラック便で配送し，もう1つのトラック便で需要地2の残り半分と需要地3の200個を配送する（図3）．

(c) トラックに満載の300個の商品を積み，各需要地に100個ずつ配送することを2回繰り返す（図4）．

(a)の場合は総費用が150で，配送が3回となる．

(b)の場合は総費用が120で，配送が2回となる．

(c)の場合は総費用が160で，配送が2回となる．

結局，費用の点でも配送回数の点でも，(b)の配送方式がもっとも優れている．

また，図5の場合はどうなるであろうか．今度は需要地の需要2が400個で，トラックの積載容量300個より大きい．このとき，図6のように，

(d) トラックに300個分の商品を満載し，需要地2へ直行便で配送し，残りの100個を他の需要地の需要と合わせて別便で送る．

とすると，必ずしも費用最小ではない．

前記の(b)，(c)のような配送方式は「分割配達（Split Delivery)」と呼ばれ，トラック数・配送費用の減少など，配送効率の向上をもたらす．

本稿では，この分割配送問題に対する1つの数理モデルを与え，分枝限定法にもとづいた解法を解説する．なお，従来の配送路問題（Vehicle Routing Problem）[1]［4]は分割配達を認めないため，『各需要はトラックの積載容量以下』という仮定があり，図5の状況に対しては配送方式(d)のような解しか求まらない．

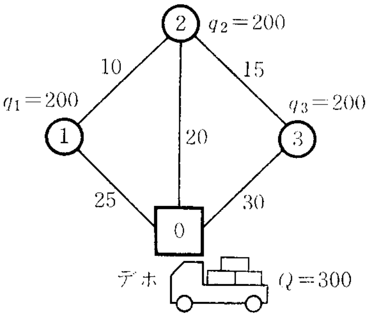

図 1　例題1

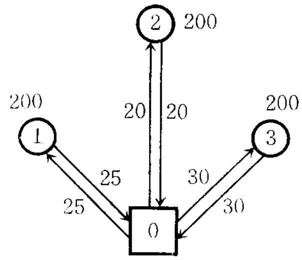

図 2　配送方式(a)

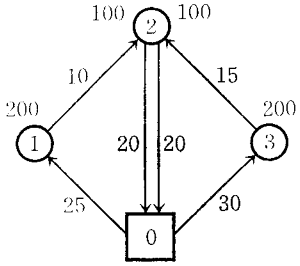

図 3　配送方式(b)

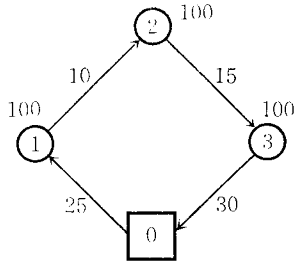

図 4　配送方式(c)

すずき　ひさとし
東京工業大学　経営工学科
〒152 目黒区大岡山2丁目

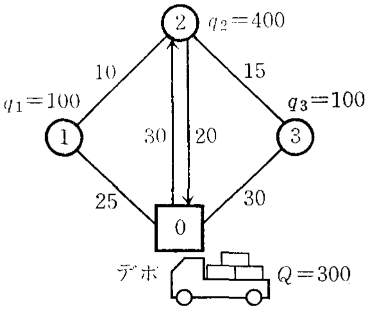

図 5　例題 2

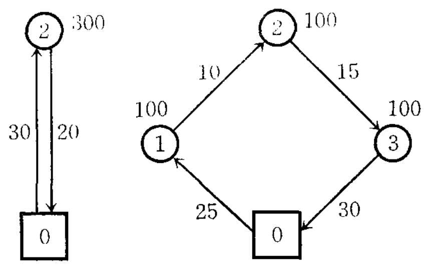

図 6　配送方式(d)

本研究の動機は，川崎製鉄㈱千葉製鉄所構内でのお弁当配送計画である．製鉄所の広大な構内に約70カ所の作業所が点在しており，各作業所から小口は1個，大口は800個程度までバラツキの多い注文に応じて，給食センターからお弁当を配達する必要がある．給食センターでは1日延べ約7,000食分のお弁当を数台のトラックで配達しているが，トラック1台当りの積載容量が約600個なので，注文量の少ない作業所をまとめて一度に配達するなど，できるだけ効率のいい配送計画を求めたい．作業所からの注文量は毎回異なるので，その度に適切な配送計画を立てる必要がある．

次に本稿で用いる記号を説明しておく．集合 S と元 a が与えられたとき，$S\cup\{a\}$ と $S\backslash\{a\}$ をそれぞれ $S\cup a$，$S\backslash a$ と略記する．任意の最適化問題(・)の最適値を $z(\cdot)$，条件 C で制限された最適化問題(・)を $(\cdot|C)$ で表わす．実数 α を下回らない最小の整数を $\lceil\alpha\rceil$ で表わす．

2. 定式化

デポと各需要地を頂点に対応させ，それらを結ぶ道路を枝とする有向ネットワーク $G^0=(N^0, A^0, C^0)$ を考える．ここで，$N^0=\{0,1,\cdots,n\}$ は頂点集合，$A^0(\subseteq N^0\times N^0)$ は頂点間の枝集合，$C^0=(c^0_{ij})$ の要素 $c^0_{ij}(\geqq 0)$ は頂点 i から頂点 j への移動費用とする．頂点0をデポ，それ以外の頂点を需要地とし，頂点 $j\,(=1,2,\cdots,n)$ の商品需要を $q_j(\geqq 0)$ とする．また，

R：頂点0を出発し，頂点0へ戻るすべての路の集合 $(R=\{1,2,\cdots,M\})$

R_j：頂点 $j\,(\neq 0)$ を通る路の集合 $(R_j\subseteq R)$

N：需要地に対応する頂点集合 $(N=\{1,2,\cdots,n\})$

N_r：路 $r\,(\in R)$ に含まれる頂点集合 $(N_r\subseteq N)$

とする．明らかに，任意の路 $r\,(\in R)$ と任意の頂点 $j\,(\in N)$ に対して，

$$r\in R_j \leftrightarrow j\in N_r \tag{1}$$

である．$c_F(\geqq 0)$ を配送1回当りの固定費，$c_B(\geqq 0)$ を路 r に沿っての移動費用とすると，路 r を用いた配送費用は $c_r=c_F+c_B(\geqq 0)$ となる．

さらに，トラックの積載容量を Q とする．

いま，整数変数 y_r を路 r の使用回数，連続変数 x_{rj} を路 r を用いて頂点 j に配達する商品の量と定義すれば，分割配達を許す配送路問題 P は，

$$\min \sum_{r\in R} c_r y_r \tag{2}$$

$$\text{sub. to} \sum_{j\in N_r} x_{rj} \leqq Q y_r,\quad r\in R \tag{3}$$

$$\sum_{r\in R_j} x_{rj}=q_j,\quad j\in N \tag{4}$$

$$0\leqq x_{rj}\leqq q_j,\quad j\in N_r,\quad r\in R \tag{5}$$

$$y_r\in\{0,1,\cdots\},\quad r\in R \tag{6}$$

と定式化できる．この数理モデルは施設配置問題(Facility Location Problem) [3] と呼ばれる混合整数計画問題の一種である．したがって，路集合 R が与えられれば，既存の施設配置問題のアルゴリズムで問題 P を解くことができる．しかし実際には，頂点数 n が比較的小さくても，路の総数 $M=|R|$ はかなり大きく，R を前もって完全に求めることは不可能である．本稿では，この路を次々に生成する方法と分枝限定法の組合せを考える．

ある最小化問題 P に分枝限定法を適用することは，元の最小化問題 P をより小さな子問題に次々に分割し，図7のような列挙木を構成する過程と見なせる [3] [2]．このとき，①分割で生成された子問題 P_k が解ける，②子問題 P_k に許容解がない，③子問題 P_k から元問題 P の最適解が得られないのいずれかが判明した場合，これらの子問題 P_k は以後の考察から除かれる．③の限定操作(列挙木の枝の見切り)は，子問題 P_k の最適値 $z(P_k)$ の下界値を求め，「下界値がすでに得られている元問題 P

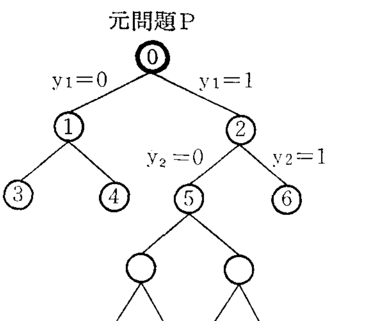

図 7　分枝限定法の列挙木

のある許容解の目的関数値（それぞれ暫定解，暫定値と言う）よりも大きければ，その子問題 P_k からは元問題 P の最適解が得られない」という，簡単な性質にもとづいている．下界値を求めるには，子問題 P_k の緩和問題を定義し，その緩和問題の効率的な解法を構築する必要がある．この部分が分枝限定法全体の効率を決定的に左右し，もっとも工夫をこらすべき点である．

3. 緩和問題

3.1 連続緩和問題

路 $r(j)$ を頂点0から最小費用で頂点 j に進み，再び最小費用で頂点0に戻る路とする．路 $r(j)$ は最短路問題を解くことで求められる．このとき，元問題 P の (6) 式を連続変数 $\bar{y}_r \geqq 0$ に緩和した連続緩和問題 $\bar{P}$（線形計画問題）は直接解けて，$\bar{P}$ の最適解と $\bar{P}$ の双対問題 $\bar{D}$ の最適解が

$$\bar{y}_r = \begin{cases} \sum_{r(j)=r} q_j/Q, & r \in \{r(1), \cdots, r(n)\} \\ 0, & r \notin \{r(1), \cdots, r(n)\} \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\bar{u}_r = c_r/Q, && r \in R \\ &\bar{v}_j = c_{r(j)}/Q, && j \in N \\ &\bar{w}_{rj} = 0, && r \in R,\ j \in N \end{aligned} \tag{8}$$

となる [6]．$\bar{u}_r, \bar{v}_j, \bar{w}_{rj}$ はそれぞれ(3)～(5)式に対応する双対変数である．このとき，連続緩和問題 $\bar{P}$（あるいは $\bar{D}$）の最適値

$$z(\bar{P}) = \sum_{j \in N} \bar{v}_j q_j$$

は，元問題 P の最適値 $z(P)$ に対する下界値となり，$z(P) \geqq z(\bar{P})$ である．

(7)式の $\bar{y}_r$ を整数値に切り上げた解

$$y^I{}_r = \lceil \bar{y}_r \rceil, \quad r \in R$$

は，(3), (6)式を満たすので，元問題 P の暫定解となる．また，そのときの暫定値

$$z^I = \sum_{r \in R} c_r \lceil \bar{y}_r \rceil$$

は，元問題 P の最適値 $z(P)$ に対する上界値となり，$z(P) \leqq z^I$ である．

3.2 ラグランジュ緩和問題

$\bar{v} = (\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n)$ の各成分を (8) 式で定め，路 $r\ (\in R)$ 毎に $y(\geqq 0)$ を変数とする2つの関数

$$\nu_r(\bar{v}, y) = \left[\begin{array}{l} \max \sum_{j \in N_r} \bar{v}_j x_{rj} \\ \text{sub. to} \sum_{j \in N_r} x_{rj} \leqq Qy \\ \qquad 0 \leqq x_{rj} \leqq q_j,\ j \in N_r \end{array} \right]$$

$$\phi_r(\bar{v}, y) = c_r y - \nu_r(\bar{v}, y)$$

を定義する．関数 $\nu_r(\bar{v}, y)$ は連続ナップサック関数と呼ばれ，$\bar{v}_j$ を大きい順に並べておけば，任意の y に対して関数値 $\nu_j(\bar{v}, y)$ を簡単に計算できる[3]．また[6]によれば，関数 $\phi_r(\bar{v}, y)$ は y に関して，①区分的線形かつ単調非減少な凸関数，②非負かつ $\phi_r(\bar{v}, 0) = 0$，③ $y \to \infty$ のとき $\phi_r(\bar{v}, y) \to \infty$ となる．

いま，元問題 P において，路 $i\ (\in R)$ の使用回数を $y_i > \triangle_i$ で制限し，残りの路 $r(\neq i)$ の使用回数を $0 \leqq y_r \leqq \triangle_r$ で制限した子問題$(P | y_i > \triangle_i,\ 0 \leqq y_r \leqq \triangle_r,\ r \neq i)$：

$$\min \sum_{r \in R} c_r y_r \tag{9}$$

$$\text{sub. to} \sum_{j \in N_r} x_{rj} \leqq Q y_r, \quad r \in R \tag{10}$$

$$\sum_{r \in R_j} x_{rj} = q_j, \quad j \in N \tag{11}$$

$$0 \leqq x_{rj} \leqq q_j, \quad j \in N_r,\ r \in R \tag{12}$$

$$y_r \in \{0, 1, \cdots, \triangle_r\}, \quad r \neq i \tag{13}$$

$$y_i \in \{\triangle_i + 1, \triangle_i + 2, \cdots\} \tag{14}$$

を考えよう．(11) 式に対応するラグランジュ乗数を $\bar{v}_j$ とするラグランジュ緩和問題 $(L(\bar{v}) | y_i > \triangle_i,\ 0 \leqq y_r \leqq \triangle_r, r \neq i)$ は

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{r \in R} c_r y_r + \sum_{j \in N} \bar{v}_j \left(q_j - \sum_{r \in R_j} x_{rj}\right) \\ \text{sub. to}\ & \sum_{j \in N_r} x_{rj} \leqq Q y_r, && r \in R \\ & 0 \leqq x_{rj} \leqq q_j,\ j \in N_r, && r \in R \\ & y_r \in \{0, 1, \cdots, \triangle_r\}, && r \neq i \\ & y_i \in \{\triangle_i + 1, \triangle_i + 2, \cdots\} \end{aligned}$$

となる．(1)式と $\phi_r(\bar{v}, y)$ の性質より，

$$\begin{aligned} & z(L(\bar{v}) | y_i > \triangle_i,\ 0 \leqq y_r \leqq \triangle_r,\ r \neq i) = \sum_{j \in N} \bar{v}_j q_j \\ & + \sum_{r \neq i} \min\{\phi_r(\bar{v}, y_r) | y_r = 0, 1, \cdots, \triangle_r\} \\ & + \min\{\phi_i(\bar{v}, y_i) | y_i = \triangle_i + 1, \triangle_i + 2, \cdots\} \\ = {} & z(\bar{P}) + \phi_i(\bar{v}, \triangle_i + 1) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．(15)式は子問題の最適値の下界値となるから，

$$z(P | y_i > \triangle_i,\ 0 \leqq y_r \leqq \triangle_r,\ r \neq i) \geqq z(\bar{P}) + \phi_i(\bar{v}, \triangle_i + 1)$$

が成り立つ．

4. 路生成法

y^I を元問題 P の1つの暫定解，z^I を対応する暫定値とする．もし，

$$\min_{i \in R} \phi_i(\bar{v}, \triangle_i + 1) \geqq z^I - z(\bar{P}) \tag{16}$$

が成立すれば，任意の路 $i\ (\in R)$ に対して

$$z(P | y_i > \triangle_i,\ 0 \leqq y_r \leqq \triangle_r,\ r \neq i) \geqq z^I \geqq z(P)$$

が成り立つ．よって，子問題 $(P | y_i > \triangle_i,\ 0 \leqq y_r \leqq \triangle_r,\ r \neq i)$ からは暫定解 y^I より優れた許容解が得られない．y^I より優れた許容解が存在するとしたら，子問題 $(P | 0 \leqq y \leqq \triangle)$ の最適解の中にある．

上記の準備の下に，次の問題 $W(\bar{v})$：

$$\min_{i \in R} \phi_i(\bar{v}, 1)$$

$$=\min_{i\in R}\begin{bmatrix}\min & c_i-\sum_{j\in N_i}\bar{v}_j x_{ij} \\ \text{sub. to} \sum_{j\in N_i} x_{ij}\leqq Q \\ & 0\leqq x_{ij}\leqq q_j,\ j\in N_i\end{bmatrix}$$

を考える．問題$W(\bar{v})$は，各頂点j（$\in N$）毎に商品の需要q_jと販売価格$\bar{v}_j$が既知のとき，「商品をQだけもった商人が，どのような路を歩き，どの頂点で，商品をどれだけ売るのが，利益最大（＝費用と売上高の差最小）となるか」を決める問題と解釈できる．これは『水売り行商人問題』として，鈴木他[5]でその解法が示されている．本研究では，利益の大きい順にk番目までの許容解（第k最適解）を求めるアルゴリズムを利用する．

いま，水売り行商人問題の第$(k-1)$最適解までが既知で，対応する路集合を$S=\{1,2,\cdots,k-1\}(\subseteq R)$とする．$R\backslash S$に属する路は未知なので，

$$\triangle_r>0,\ r\in S=\{1,2,\cdots,k-1\}$$
$$\triangle_r=0,\ r\in R\backslash S=\{k,k+1,\cdots\}$$

なる適当な非負整数ベクトル$\triangle=(\triangle_1,\cdots,\triangle_M)$を定め，子問題$(P|0\leqq y\leqq\triangle)$を解く．もし$\triangle$が(16)式を満たすならば，子問題$(P|0\leqq y\leqq\triangle)$を解くことで，$S=\{1,2,\cdots,k-1\}$に属する路のみを用いて元問題$P$の最適解が得られる．$\triangle$が(16)式を満たすか否かの判定は，(16)式の左辺が

$$\min_{i\in R}\ \phi_i(\bar{v},\triangle_i+1)$$
$$=\min\{\min_{i\in S}\ \phi_i(\bar{v},\triangle_i+1),\ \min_{i\in R\backslash S}\ \phi_i(\bar{v},1)\} \qquad (17)$$

と変形できることを利用する．(17)式の第1項は，既知の路i（$\in S$）に対する関数値$\phi_i(\bar{v},\triangle_i+1)$の比較なので，実質的には$\nu_i(\bar{v},y)$の値を求める連続ナップサック問題に帰着する．第2項は，水売り行商人問題$W(\bar{v})$の第k最適解を求めることに帰着する．

このように本研究では，新たな路r（$\in R\backslash S$）を1本生成して現在の路集合Sに追加するか（$\triangle_r=0\rightarrow\triangle_r=1$），すでに生成されている路$r$（$\in S$）の使用回数の上限$\triangle_r$を増やすかして（$\triangle_r>0\rightarrow\triangle_r+1$），子問題$(P|0\leqq y\leqq\triangle)$の最適解が元問題$P$の最適解となるように，上限ベクトル$\triangle$と路集合$S$を構成してゆく

5. アルゴリズムと数値例

次に4章の路生成法を取り入れた分枝限定法を述べる．通常の分枝限定法では，列挙木を『根』に近い部分からつぎつぎと分枝して，節点（子問題）を生成してゆく．本研究での分枝限定法は，これとは逆に，列挙木の『葉』の方から節点から作り始め，徐々に『根』に近い方の節点を作りながら，全体の列挙木を構成するものである（**図8**）．

また，本アルゴリズム中に，$\triangle$の更新毎に子問題$(P|0\leqq y\leqq\triangle)$を施設配置問題のアルゴリズムを利用して繰り返し解く部分がある．この$\triangle$の更新は1つの上限$\triangle_i$が＋1変化するだけなので，子問題$(P|0\leqq y\leqq\triangle)$を初めから解き直さず，変化に関係する子問題だけを解くことで済ませている．

〈アルゴリズム〉

1：路$r(j)$（$\forall j\in N$）を求める．あるjで$r(j)$が存在しなければ，13へ進む．$\bar{v}_j\leftarrow c_{r(j)}/Q(j\in N)$，$z(\bar{P})\leftarrow\sum_{j\in N}\bar{v}_j q_j$．

2：元問題Pの暫定解y^Iと暫定値z^Iを求める．

3：$\triangle\leftarrow(0,\cdots,0)$，$S\leftarrow\phi$，$k\leftarrow 0$，$t\leftarrow 0$．

4：$k\leftarrow k+1$，$t\leftarrow t+1$．水売り行商人問題の第k最適解を路tとして，$\phi_t\leftarrow\min\{\phi_i(\bar{v},1)|i\in R\backslash S\}$．$\phi_t\geqq z^I-z(\bar{P})$ならば$\phi_t=\infty$として6へ進む．

5：$N_t=N_r$なる路r（$\in S$）が存在するときは$t\leftarrow t-1$として4へ戻る．

6：$\phi_s\leftarrow\min\{\phi_r(\bar{v},\triangle_r+1)|r\in S\}$（$S=\phi$のときは$\phi_s\leftarrow\infty$）．最小値を与える路を$s$とする．

7：①$\min\{\phi_s,\phi_t\}\geqq z^I-z(\bar{P})$ならば12へ進む．
②$\phi_s>\phi_t$ならば$i\leftarrow t, S\leftarrow S\cup t$として8へ進む．
③$\phi_s\leqq\phi_t$ならば$i\leftarrow s$として8へ進む．

8：$\triangle_i\leftarrow\triangle_i+1$．

9：施設配置問題のアルゴリズムで子問題$(P|y_i=\triangle_i,\ 0\leqq y_r\leqq\triangle_r,\ r\neq i)$を解き，最適解$y^0$と最適値$z^0$を求める（許容解が存在しないときは$z^0\leftarrow\infty$）．

10：$z^0<z^I$ならば$z^I\leftarrow z^0$，$y^I\leftarrow z^0$．

11：$\phi_s>\phi_t$ならば4へ戻る．$\phi_s\leqq\phi_t$ならば6へ戻る．

12：y^Iが元問題Pの最適解，z^Iが最適値．停止．

13：元問題Pに許容解が存在しない．停止．

図5の例題2に対して本アルゴリズムを適用する．

表1に，水売り行商人問題の第1最適解から第8最適解までに対応する路kとその距離，および$y=0,1,2$における関数値$\phi_k(\bar{v},y)$を示した．図8には，本アルゴリズムが生成する列挙木を示す．得られた最適解は$y^*=(0,1,1,0,\cdots,0)$で，最小費用は$z^*=120$である．頂点を$0\rightarrow1\rightarrow2\rightarrow0$と巡るトラックで，頂点1に100，頂点2に200の商品を配送し，$0\rightarrow3\rightarrow2\rightarrow0$と巡るトラックで，頂点3に100，頂点2に200の商品を配送する計画が最適である．

この例題では，表1に示した8本の路のうち，最初の5本までで路の生成が終了し，残りの路を知ることなく

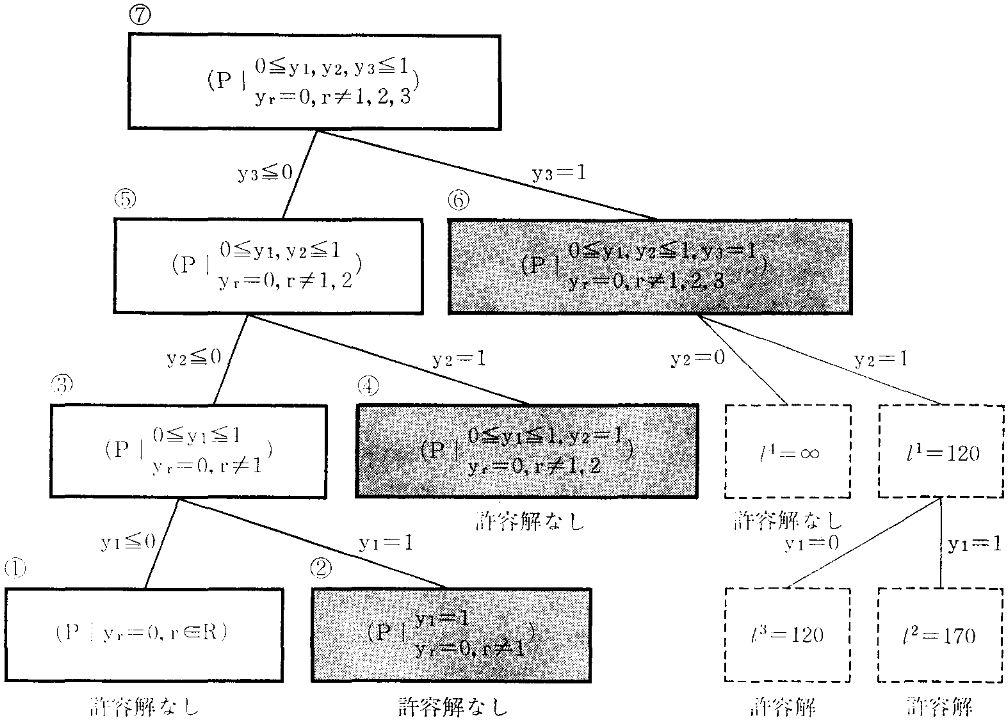

図 8 アルゴリズムで生成される列挙木

元問題Pの最適解が得られる．しかも，図8の網掛けの節点だけが，施設配置問題のアルゴリズムを用いて子問題$(P|y_i=\triangle_i,\ 0\leqq y_r\leqq\triangle_r,\ r\neq i)$を実際に解いた節点である．本稿で提案したアルゴリズムは，このように効率の良いものである．なお，破線で囲んだ節点は，施設配置問題のアルゴリズム(これも分枝限定法にもとづく)が生成した節点である．

数値実験の結果を**表2**に示す．頂点数7の完全グラフで，枝の移動費用$c^0{}_{ij}$を[1,100]の一様乱数，頂点jの需要q_jを[3,10]の一様乱数とした配送路問題を10個生成し，各問題に本アルゴリズム(分割配達)と，Laporte他[4]のアルゴリズム(非分割配達)の2つを適用した．トラックの積載容量は$Q=12$とした．Laporteのアルゴリズムでは配送方式(d)の計画しか求まらないので，最適値の点から見ると，明らかに本アルゴリズムで求めた配送計画の方が，Laporteの配送計画よりも優れている．本アルゴリズムで求めた計画がたまたま非分割配達となったときは，分割配達の発生の欄に非分割と記した．このことから，分割配達方式の採用により配送費用を減少できる場合がかなり多いことがわかる．

6. おわりに

本稿では，需要の分割配達を許す配送路問題に対して，配送路を供給施設と見立てた施設配置問題への定式化を与え，路生成法と分枝限定法を組み合せた解法を述べた．この解法は，施設配置問題を解く局面の分枝限定法の外側で，路を生成・追加する局面の分枝限定法を用いる二重構造の分枝限定法アルゴリズムとなっている．

参 考 文 献

[1] Christofides, N., A. Mingozzi, and P. Toth, "Exact algorithms for the vehicle routing problem based on spanning tree and shortest path relaxations," *Math. Prog.*, 20, pp.255-282(1981).

[2] 茨木俊秀，『組合せ最適化—分枝限定法を中心として—』，産業図書，1983.

[3] 今野 浩，鈴木久敏（編著），『整数計画法と組合せ最適化』，日科技連出版社，1982.

[4] Laporte, G., H, Mercure, and Y. Nobert, "An exact algorithm for the asymmetrical capacitated vehicle routing problem," *Net-*

表 1　水売り行商人問題の第 k 最適路とその諸元

路番号 k	第 k 最適路	距離 c_k	関数 $\phi_k(\bar{v},y)$ の値 $\phi_k(\bar{v},0)$	$\phi_k(\bar{v},1)$	$\phi_k(\bar{v},2)$
1	(0,2,0)	50	0	0	100/3
2	(0,1,2,0)	55	0	15/3	80/3
3	(0,3,2,0)	65	0	35/3	130/3
4	(0,2,1,0)	65	0	45/3	140/3
5	(0,2,3,0)	75	0	65/3	190/3
6	(0,1,2,3,0) or (0,3,2,1,0)	80	0	80/3	170/3
7	(0,1,0)	50	0	100/3	250/3
8	(0,3,0)	60	0	120/3	300/3
	⋮				

表 2　計算結果（頂点数＝7［デポを含む］）

問題	生成した配送路数	最適解の配送路数	分割配達の最適値	非分割配達(d)の最適値	分割配達の発生
1	20 (128)*	3	241	255	分割
2	(>600)#	…	…	395	…
3	13 (68)	3	241	308	分割
4	30 (355)	3	192	192	非分割
5	40 (346)	3	192	313	分割
6	46 (328)	3	325	355	分割
7	34 (224)	4	308	313	分割
8	36 (167)	2	338	363	分割
9	(>600)#	…	…	525	…
10	26 (82)	3	191	191	非分割

*　(　) 内は解いた水売り行商人問題の数

#　記憶容量の限界による計算打切り

works, 16, pp. 33-46(1986).

[5] 鈴木久敏，辻　真人，平林隆一，"水売り行商人問題，" *J. of Opns. Res. Soc. of Japan*, to appear.

[6] 鈴木久敏，辻　真人，平林隆一，"分割配達を許す配送路問題，" Technical Report No. J-5 東京工業大学経営工学科，(1987).