特集に当って

茨木　俊秀

組合せ最適化に関する話題は本誌でもしばしばとり上げられている．近いところでは一昨年1月号の「組合せ最適化」があり，昨年4月号の「取り合わせ計画」や11月号の「スケジューリング」などは組合せ最適化の典型的な応用分野である．今回は代表的な解法である「分枝限定法」について，その適用例を中心に特集を組むことになった．

分枝限定法 (branch-and-bound method) は，一言で述べれば，要領の良い列挙法とでもいうべきものである．基本的な考え方は以下のようにまとめられる．

与えられた問題を直接解くことがむずかしい場合，それをいくつかの部分問題に分解し，それぞれを解くことによって間接的に元の問題を解くという作戦が考えられる．部分問題がやはり手に負えなければ，さらに分解が加えられ，その結果，原問題は数多くの部分問題に細分化されてゆくことになる．この様子を図に書くと木の形状になるため，部分問題の分解を分枝操作という．部分問題の規模がある程度小さくなると簡単に解けるようになり，その結果として原問題も解かれるが，このままでは単なる列挙法にすぎず，実用的に意味があるとはいえない．

分枝限定法の第2のポイントは限定操作である．すなわち，各部分問題 P_i にテストを加えて，P_i の最適解が容易に求まるか，あるいは P_i がその時点の暫定解より良い解を与える可能性がないことが結論できれば，P_iを終端し分枝操作の適用を行なわない．暫定解とは，それまでにテストされた部分問題から得られている解のうち最良のものを指し，良い解が発見されればそのつど更新される．

部分問題 P_i のテストは，P_i を厳密に解くのに比べてはるかに簡単な計算で実行でき，しかも終端条件をしばしば満足するものでなければ意味がない．一般的なアプローチとして，P_iの制約条件を緩めて解きやすくした緩和問題 $\overline{P}_i$ がよく用いられる．たとえば，P_i があるタイプの整数計画問題であるとき，整数条件を除いて得られる線形計画問題を緩和問題$\overline{P}_i$とするのである．この他にもラグランジュ緩和や，それにもとづく劣勾配法など，いろいろな方法が提案されている．分技限定法の成功の最大の鍵は，与えられた問題の構造にうまく合致した有効な緩和問題を発見できるかどうかにあるといっても過言ではない．

分枝限定法の計算の各反復において，一般に多数の部分問題がテストを加えられないまま残っているので，そのうちのどの部分問題を次に選びテストを加えるか，そのルールを定めなければならない．これを探索法といいやはりアルゴリズムの挙動に大きな影響を与える．代表的な探索法のうち，深さ優先探索(depth-first search, 縦形探索) は，必要とする記憶領域が少ないという特徴をもち，プログラムも簡単である．最良下界探索(best-bound search)あるいは最良優先探索 (best-first search)は，緩和問題 $\overline{P}_i$ の値にしたがって優先順位をつけるもので，計算終了までに生成される部分問題の個数が最小になるという性質がある (したがって計算時間の面から望ましい)．さらに，発見的探索(heuristic search)は，各部分問題P_iに対し，その最適値の推定値$h(P_i)$を求め，その値にしたがって探索順位を決定するものである．推定がうまくいけば，計算の早い時期に良い解が暫定解として得られ，しかも全計算時間の点からも有効である．

ところで，分枝限定法が対象とする問題は，そもそも原理的に非常にむずかしく，しかも規模も大きいことが多い．計算の複雑さの理論にいう，いわゆるＮＰ困難な問題がその代表例である．分枝限定法の各部分をうまく

いばらき　としひで　京都大学　工学部　数理工学科
〒606　京都市左京区吉田本町

構成すると，このようなむずかしい問題であっても，十分実用的に厳密解を求め得る場合もある．ナップサック問題や行商人問題に対する分枝限定法がそのような例であろう．しかし，現実の利用法の多くは，分枝限定法を適当な時間走らせて最適解が得られればよし，そうでなければその時点で計算を打切り，得られている暫定解を近似最適解として利用するというものである．この目的には，上述の探索法のうち発見的探索が適しており，さらに，探索をガイドする関数 $h(P_i)$ が重要である．（緩和問題の定め方より大きな影響をもつといえる）

$h(P_i)$ の計算に，最近いろいろな分野への応用が話題になっている人工知能の手法を用いることは魅力的である．すなわち，解くべき問題に対して専門家が有している知識を総動員して，良い解の存在する領域を特定し，探索をそこに集中しようとするものである．エキスパートシステムなどのために開発されている人工知能のいろいろなツールを利用すると，このような漠然とした目的を容易にプログラムとして実現できる．

分枝限定法と簡単に言っても，このようにいろいろな側面をもつ．本特集のために御執筆いただいた6編は，対象とする問題が異なるばかりでなく，それぞれ分枝限定法の各部分に置かれている力点が微妙に変化している．計算目標（最適解が必要か近似解でよいか）や使用コンピュータの速度・容量なども考慮して，緩和問題や探索法に工夫がこらされている点にご注目願いたい．

最初の鈴木久敏氏の記事は，配送問題に対する分枝限定法の比較的標準的な適用例といえよう．緩和問題の定め方に特に工夫がみられ，従来の類似アルゴリズムにはない新しいアイデアを提供している．

マルチプロセッサ・スケジューリング問題に対する笠原博徳氏の分技限定法も標準的なものといえるが，アルゴリズムの各部分のぜい肉をけずり，高速実行を実現している．また，近似解の許容誤差 ε を導入して，所要時間の調節を試みている．

正導寺勉氏は非凸形の目標関数をもつ非線形最適化問題を扱っている．この種の問題は局所最適解を数多くもつので，分枝限定法の考え方にしたがって領域を組織的に分割してゆき，見込のない領域を早く発見し考慮から除くことで計算効率を高めている．

次の2編は，人工知能的な手法をとり入れているところに共通点がある．駒井研二氏と坂口敏明氏は，電力系統の復旧問題を分枝限定法と知識工学的な手法の両方で扱い，それぞれの得失を論じている．前者は，必要ならば厳密な最適解を得ることができるが，時間がかかる．これに対し後者は，専門家の知識を用いて解を早く得るには適しているが最適性は保証できない．福村聡氏，佐能克明氏および山川栄樹氏は，分枝限定法の枠内で，良い近似最適解を効率よく探索するために専門家の知識を組み入れている．厳密な最適解を得ることは最初から狙っていないが，現実の問題では最適性の概念自体が明確になりづらい場合が多いので，実用上有効な手法と考えられる．

最後の赤間清氏の記事は，人工知能における推論の進め方が，実は分枝限定法として解釈できることを述べている．すなわち，確信度つきの Prolog において，格納された知識を利用して確信度の最も高い解決策を見出すことは，組合せ最適化問題の最適解を得ることに他ならないことに注目し，最良優先探索の適用を提案している．

本特集の内容からもわかるように，分枝限定法はその適用範囲が非常に広く，しかも実用的な手法である．それぞれ力作をお寄せいただいた筆者の方々に，読者になりかわり感謝の意を示したい．なお，最後に，分枝限定法を比較的詳しく論じている成書として以下の2冊をあげておこう．[1]は分枝限定法の一般的性質を扱っており，[2]は具体的な問題に対する分枝限定法の開発例に詳しい．

文　献

[1] 茨木，組合せ最適化一分枝限定法を中心として，産業図書，1983；より詳しくは，T. Ibaraki, Enumerative Approaches to Combinatorial Optimization, Annals of Operations Research 10, J. C. Baltzer, 1987.

[2] 今野，鈴木(編)，整数計画法と組合せ最適化，日科技連．1982.